UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

DISCUSSÃO MATEMÁTICA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Cátia Sofia Nunes Rodrigues

Orientadores: Professor Doutor José Luís Menezes Correia
Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

2020

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

DISCUSSÃO MATEMÁTICA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Cátia Sofia Nunes Rodrigues

Orientadores: Professor Doutor José Luís Menezes Correia
Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutora Cecília Galvão Couto, Professora Catedrática e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

- Doutora Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira, Professora Auxiliar Faculdade de Ciências da Universidade do Porto;
- Doutora Maria Helena Silva Sousa Martinho, Professora Auxiliar Instituto de Educação da Universidade do Minho;
- Doutor José Luís Menezes Correia, Professor Adjunto Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viseu, orientador;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Joana da Fonte Dias Gomes da Mata Pereira, Professora Auxiliar Convidada Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

2020

RESUMO

As discussões matemáticas assumem um lugar importante na aprendizagem, permitindo ao aluno o desenvolvimento de diversas capacidades. Sendo que a promoção desses momentos de interação é responsabilidade do professor, o seu conhecimento e as ações que realiza influenciam e dão corpo à condução da discussão e, consequentemente, à aprendizagem pelos alunos. Este estudo procura, assim, compreender como professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico, num contexto de trabalho colaborativo, desenvolvem o seu conhecimento didático e as suas práticas letivas na preparação e dinamização de discussões matemáticas coletivas no ensino da Álgebra. Este trabalho, qualitativo e interpretativo, tem por base o estudo de caso de três professores de um mesmo agrupamento de escolas. Recorre ao trabalho colaborativo como dispositivo do estudo, dado ser propício ao estudo das práticas e conhecimento dos professores na condução de discussões, com vista à promoção da aprendizagem dos alunos. Os dados são recolhidos através de entrevista, observação participante (das aulas e das sessões de trabalho colaborativo) e análise documental. A análise dos dados é realizada através de um percurso recursivo de análise de conteúdo, apoiada no quadro teórico.

Os resultados mostram que os três professores preparam detalhadamente a discussão, selecionando criteriosamente as tarefas que apresentam aos seus alunos. Privilegiam as tarefas que surgem em contextos diversificados e não matemáticos, onde os pedidos aparecem num grau de complexidade crescente e progressivamente com menor explicitação da representação a usar. Os problemas surgem neste estudo como desafios com potencial e que satisfazem as perspetivas dos professores sobre as características que as tarefas devem obedecer para envolver os alunos em discussões matemáticas. Para essas tarefas, os professores antecipam estratégias de resolução a apresentar pelos alunos (tentativa e erro, tabular e algébrica) e pensam como organizar as suas intervenções para os envolver em discussão. Em sala de aula, os professores são surpreendidos por estratégias não antecipadas, mas que conseguem integrar na discussão. Apoiados na preparação feita, os professores conduzem a discussão por três componentes principais: *i)* apresentação; *ii)* comparação, avaliação e filtragem; e *iii)* conclusão. A apresentação das estratégias tem início com as resoluções que envolvem linguagem matemática informal e são concebidas por um maior número de alunos, continuando com as que usam linguagem mais formal e terminando com as que surgem de forma isolada na turma. A transição entre resoluções permite levar os professores a comparar, avaliar e focar a atenção dos alunos em raciocínios específicos. A discussão termina com uma síntese das principais ideias emergentes na discussão coletiva, procurando salientar dificuldades dos alunos e frisar conteúdos algébricos. O discurso promovido segue um processo de estreitamento, com incidência na generalização de ideias algébricas. Para esta dinamização, os professores apoiam-se na articulação de quatro tipos principais de ações de ensino: *i)* elicitar; *ii)* informar; *iii)* desafiar; e *iv)* apoiar. A prática dos professores de preparação e dinamização da discussão é apoiada no seu conhecimento didático, nas vertentes do conhecimento da Matemática, dos alunos e da aprendizagem, da prática letiva e do currículo.

Palavras-chave: Discussão matemática; Prática; Conhecimento profissional; Ensino da Álgebra; Aprendizagem da Álgebra.

ABSTRACT

Mathematical discussions take an important place in learning, allowing the student to develop various skills. Since the promotion of these moments of interaction is the teacher's responsibility, his/her knowledge and the actions influence and give substance to the course of the discussion and, consequently, to students' learning. This study seeks to understand how mathematics teachers of the 3rd cycle of basic education, in a context of collaborative work, develop their didactic knowledge and their teaching practices in the preparation and dynamization of mathematical discussions in the teaching of Algebra. This qualitative and interpretative work is based on the case study of three teachers from the same school cluster. It uses collaborative work as a study device, since it is favorable to the study of teachers' practices and knowledge in conducting discussions, with a view to promoting student learning. The data is collected through interviews, participant observation (of classes and of collaborative work sessions) and document analysis. Data analysis is performed through a recursive course of content analysis, supported by the theoretical framework.

The results show that the three teachers prepare the discussion in detail, carefully selecting the tasks they present to their students. They emphasize the tasks that arise in diverse and non-mathematical contexts, where the requests appear in a degree of increasing complexity and progressively with less exploration of the representation to use. Problems emerge in this study as tasks with potential and that satisfy the teachers' perspectives on the features that the tasks must follow in order to involve students in mathematical discussions. For these tasks, teachers anticipate solving strategies to be presented by the students (trial and error, tabular and algebraic) and think how to organize their interventions to involve the students in the discussion. In the classroom, teachers are surprised by unpredicted strategies, that are still able to integrate into the discussion. Supported by the preparation made, teachers conduct the discussion by three main components: *i)* presentation; *ii)* comparison, evaluation and filtering; and *iii)* conclusion. The presentation of strategies starts with solutions that involve informal mathematical language and are done by a larger number of students, continuing with those using more formal language and ending with those that uncommon in the class. The transition between solutions allows the teachers to compare, evaluate, and focus students' attention on specific reasoning. The discussion ends with a synthesis of the main ideas emerging in the collective discussion, trying to highlight students' difficulties and algebraic contents. The promoted speech follows a process of narrowing, with incidence in the generalization of algebraic ideas. For this enhancement, teachers rely on the articulation of four main types of teaching actions: *i)* elicit; *ii)* inform; *iii)* challenge; and *iv)* support. Teachers' practice of preparing and energizing the discussion is supported by their didactic knowledge, in the areas of mathematics knowledge, students and learning, teaching practice and curriculum.

Keywords: Mathematical discussion; Practice; Professional knowledge; Teaching of Algebra; Learning of Algebra.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores

Aos professores do estudo e aos seus alunos

Aos meus amigos

Aos meus pais

À Vânia, ao Daniel e à Eva

ÍNDICE

ÍNDICE DE ANEXOS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I

Introdução

Este capítulo introdutório desenrola-se ao longo de quatro secções. Na primeira, começo por enquadrar e justificar o estudo realizado, apresentando, na segunda, as motivações que me levaram à sua realização. Na terceira, apresento os objetivos da investigação e as questões que a orientam. Na última, para facilitar a leitura deste trabalho, faculto uma descrição sucinta da organização de cada secção.

Enquadramento e pertinência do estudo

As discussões coletivas são, atualmente, um elemento fundamental do ensino da Matemática por favorecerem a aprendizagem dos alunos, na medida em que estes aprendem de modo semelhante à dos cientistas, ou seja, em resultado da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre essa mesma atividade através da sua participação no discurso da aula, na forma de discussões (Bahr & Bahr, 2017; Cengiz, Kline, & Grant, 2011; Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997; Ponte, Quaresma, & Mata-Pereira, 2017; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Desta forma, o interesse por este tema ganha destaque na investigação em Didática da Matemática, onde são desenvolvidos diversos trabalhos de investigação com professores e com alunos, focados nas discussões matemáticas, com o propósito de compreender esta prática complexa, considerada por muitos como das mais difíceis, exigentes e desafiantes para os professores (Bahr & Bahr, 2017; McCrone, 2005; Sherin, 2000, 2002a; Tyminski, Zambak, Drake, & Land, 2014).

A investigação realizada ao longo destas últimas três décadas, centra-se, essencialmente, na prática dos professores na preparação e dinamização de discussões coletivas, nas ações que desempenham na orquestração das discussões e no conhecimento e crenças que lhe serve de suporte, com o intuito de compreender como estes elementos se interrelacionam (Cengiz et al., 2011; Chapin, O'Connor, & Anderson, 2003; Clayton, 2014; Stein et al., 2008). A condução de discussões sendo uma tarefa exigente e complexa provoca algumas tensões nos professores, tendo alguma investigação se debruçado sobre esta temática.

No que respeita às práticas de discussão, um marco importante na investigação sobre este tema foi a publicação do trabalho de Stein e colegas (2008), com a definição de cinco práticas que podem apoiar os professores na orquestração de discussões matemáticas produtivas. As autoras advertem que este modelo não deve ser encarado como um conjunto de receitas, mas antes como uma componente da prática pedagógica dos professores, com as quais interatua (Stein et al., 2008).

Dada a pertinência da preparação de uma discussão para o sucesso da sua condução em sala de aula, a prática de conduzir discussões tem recebido notável atenção na formação de professores (Selling, Shaughnessy, Willis, Garcia, O'Neill, & Ball, 2015). A este respeito, destaco o estudo de Tyminski e colegas (2014), onde se analisam como futuros professores preparam aulas que envolvem a orquestração de uma discussão coletiva, a partir de um conjunto de tarefas que lhe são fornecidas, apoiando-se no modelo das cinco práticas de Stein e colegas (2008). Ainda na formação de professores, Ponte (2011) conduz um trabalho onde os professores dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, recorrendo à análise de aulas gravadas, refletem sobre os momentos de discussão de sala de aula, após uma fase em que resolveram uma tarefa algébrica, enquadraram-na curricularmente e anteciparam possíveis dificuldades experimentadas pelos alunos. Os resultados apontam que os professores revelam dificuldades na preparação e condução de discussões em sala de aula com tarefas algébricas, dado que evidenciam dificuldades na compreensão de questões relacionadas com o pensamento algébrico e sobre as expectativas do que os alunos são capazes de fazer. O uso de vídeo revelou-se uma ferramenta eficaz para analisar discussões matemáticas, por considerarem que os ajuda a lidar melhor com a complexidade das situações que surgem em sala de aula, nomeadamente, gerir o discurso, olhando para a natureza das intervenções dos alunos e dos professores. Este estudo evidencia, também, que os professores não estão habituados a analisar discussões em sala de aula.

Outra linha de investigação que emerge dentro da problemática das discussões coletivas é o tipo de ações que o professor incrementa na sua prática de dinamizar discussões. Cengiz e colegas (2011) e Ponte e colegas (2013) concluem que as ações dos professores são, essencialmente, de três tipos: ações que pretendem iniciar a discussão, ações que fomentam a sua continuidade e ações que intentam a sua conclusão. Para Ponte e colegas (2017), estas ações estão relacionas com os processos matemáticos de representar, interpretar, raciocinar e avaliar.

No equivalente ao nosso ensino básico, Rota e Leikin (2002) analisam como uma professora conduz discussões coletivas em sala de aula, com vista a caracterizar as ações que são empreendidas durante a condução da discussão, concluindo que são, essencialmente, dos três tipos principais de ações anteriormente apontados, mas acrescentando um conjunto de ações mais transversais que designam de classe de ações de ouvir e observar.

O estudo sobre o conhecimento profissional dos professores mobilizado durante a dinamização de discussões desperta, também, o interesse dos investigadores. Speer e Wagner (2009) estudam de que forma o conhecimento do professor e as ações que implementam influenciam o sucesso de uma discussão. Estes autores concluem que a qualidade de uma discussão depende da articulação de vários tipos de conhecimento, como o conhecimento matemático do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Bray (2011) estuda professores do 3.º ano para compreender a influência das suas crenças e conhecimento no modo como lidam com o erro durante uma discussão, já que a orquestração de discussões produtivas é algo que preocupa os professores, em particular como incorporar o erro nas discussões. O estudo conclui que os professores com um melhor conhecimento sentem-se mais à vontade para explorar situações de erro durante a discussão e para alargar a compreensão conceptual da Matemática. O estudo também indica que trabalhar com os alunos sobre situações de erro está relacionado com as crenças dos professores sobre as capacidades dos alunos e sobre o seu papel de professor.

Wagner, Speer e Rossa (2007) focados, também, no conhecimento do professor mobilizado na condução de discussões, concluem que o professor recorre a diversos tipos de conhecimento quando planifica e atua em sala de aula, como o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. O estudo mostrou, ainda, que apesar da vasta experiência de ensino do professor e do seu forte conhecimento do conteúdo, o professor enfrenta desafios quando conduz discussões a partir do *scaffolding analítico*, ou seja, quando seleciona criteriosamente os contributos mais relevantes dos alunos, com vista a alcançar os objetivos matemáticos estipulados para aquela aula.

Focados nos dilemas que o professor enfrenta na condução das discussões, Sherin (2000) conclui que estes ocorrem quando o professor tenta que as ideias dos alunos sejam a base da discussão, ao mesmo tempo que pretende que as discussões sejam matematicamente produtivas.

As discussões matemáticas são perspetivadas na investigação como uma abordagem metodológica ao ensino da Matemática, onde professores e alunos desempenham papéis importantes. Na verdade, o trabalho do aluno é o ponto de partida para as discussões, com o objetivo de os levar a aprender matemática (Stein et al., 2008) e o professor é responsável pela elaboração dessas propostas que desencadeiam a atividade do aluno. Dessa forma, o professor é responsável pela escolha de tarefas apropriadas à compreensão matemática e pelo apoio prestado aos alunos durante a sua atividade com essas tarefas (Leikin & Dinur, 2007; Speer & Wagner, 2009; Staples, 2007). Contudo, a seleção de boas tarefas não é suficiente para garantir a qualidade de uma discussão, essa qualidade depende também das normas de discurso geradas durante a aula (Moschkovich & Zahner, 2018). Também Leikin e Dinur (2007) enfatizam que as discussões devem focar-se nas ideias matemáticas importantes bem como no processo comunicativo que promove a construção de significados matemáticos. Assim, é objetivo das discussões que pretendem promover o raciocínio dos alunos, levá-los a refletir sobre várias soluções, analisar resoluções específicas e considerar métodos mais eficientes (Cengiz, 2013). Para a criação desses momentos de sala de aula, Sherin (2002a) propõe que o professor promova a discussão coletiva por vários ciclos do seguinte padrão discursivo: solicitar ideias; comparar e avaliar essas ideias; e focar ideias matemáticas importantes. Também Wood (1999) apresenta um ciclo semelhante, mas focado, essencialmente, no desenvolvimento da argumentação: um aluno apresenta uma justificação para a sua resolução; um aluno discorda; o primeiro aluno apresenta uma nova justificação; o segundo aceita a justificação ou continua a discordar, apresentando a sua justificação para não concordar; o primeiro continua a justificar a sua resolução; outros alunos introduzem novos contributos para resolver a situação; e o processo continua até todos estarem de acordo. Este padrão discursivo decorre após uma fase em que o professor recolhe as respostas dos alunos. O modelo apresentado evidencia a importância da justificação e da argumentação numa discussão coletiva. A relevância destes processos matemáticos numa discussão é também defendida por Cengiz e colegas

(2011), ao salientarem que a apresentação das estratégias ou ideias dos alunos não é suficiente para ampliar o pensamento dos alunos. Contudo, é um objetivo importante das discussões matemáticas, pois permite criar uma multiplicidade de estratégias e estabelecer relações entre elas, conseguido através do padrão de discurso *repertório de estratégias* (*strategy reporting*) (Hintz, 2011). Este padrão consiste na apresentação de diversas estratégias pelos alunos e tem como propósito suscitar ideias, criar múltiplas estratégias, encontrar formas de representar o pensamento dos alunos, estabelecer conexões entre as suas ideias (comparando as estratégias) e construir um repertório de estratégias. Este tipo de participação dos alunos na discussão deve ser complementada com a apresentação de justificações para os raciocínios exibidos e com o questionamento sobre os contributos dos colegas. Ou seja, é importante que as aulas de Matemática contemplem momentos de confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conhecimentos, já que a discussão de estratégias permite aos alunos identificar raciocínios dos colegas, construir um repertório de estratégias, relacionar ideias e promover a reflexão (ME, 2007).

A forma como os professores e os alunos encaram o seu papel na discussão vai mudando com o seu progressivo envolvimento em discussões, evoluindo, no caso dos alunos, da simples apresentação de respostas ou estratégia seguida para o acompanhamento dessa apresentação com a justificação para os raciocínios desenvolvidos e interpelação aos colegas. Em consequência, o papel do professor também muda, fundamentalmente, no questionamento que dirige aos alunos, já que se inicialmente o tipo de perguntas formuladas estava relacionado com aspetos da resolução apresentada, posteriormente inclui desafios aos alunos para os levar a estabelecer conexões entre resoluções e desenvolvimento de generalizações, ao levá-los a pensar em situações semelhantes (McCrone, 2005). Assim, durante as discussões, espera-se que os alunos sejam participantes empenhados, ou seja, que sejam capazes de partilhar o seu pensamento numa linguagem reconhecida por todos e de aprender a escutar, já que ao ouvirem as ideias dos outros as suas ideias podem tornar-se mais claras (Hoyles, 1985). Para Kosko e Wilkins (2015), ao levar os alunos a explicar, a ouvir e a justificar ideias durante a discussão, os professores estão a desenvolver a autonomia dos alunos.

Na aprendizagem da Matemática com compreensão, é, também, fundamental que as discussões se centram em ideias algébricas, pois permitem o desenvolvimento do pensamento algébrico, ao favorecerem a discussão de conceitos relacionados com o estudo de diversos tipos de relações e atividades de simbolização e generalização (ME, 2007), contrariando a ideia de que a Álgebra é apenas manipulação simbólica. De facto, o ensino da Álgebra pressupõe a compreensão de conceitos algébricos, de estruturas e princípios que regem a manipulação simbólica, assim como o modo como os próprios símbolos podem ser usados para registar ideias e formular conjeturas (Kaput, 2008; NCTM, 2007). As discussões matemáticas no tema da Álgebra levam, muitas vezes, os alunos a fazerem generalizações de ideias matemáticas, que envolvem a ampliação dos seus raciocínios ou comunicação para além dos casos considerados, identificando padrões, relações e estruturas (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Kaput, 1999), através da partilha de ideias ou do envolvimento no processo de negociação de significados. Neste processo de generalização, o professor incentiva os alunos ao uso de uma linguagem cada vez mais formal. As generalizações que os alunos estabelecem contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Kaput, 1998, 1999), onde a conjetura desempenha um papel muito importante (Carraher et al., 2008).

As decisões e as ações que o professor toma na sala de aula são determinantes, já que vão influenciar a aprendizagem dos alunos e são sempre apoiadas no seu conhecimento. É esse conhecimento que suporta a sua ação de selecionar tarefas que favoreçam o envolvimento dos alunos em discussão e, simultaneamente, promovam a sua participação no discurso da aula, com vista à construção de conhecimento matemático. Ou seja, é esse conhecimento que auxilia o professor "na formação de juízos, relativamente ao currículo, na resposta às questões colocadas pelos alunos e na previsão do desenvolvimento que os conceitos podem tomar, bem como no planeamento das aulas de acordo com esse desenvolvimento" (NCTM, 2007, p. 18).

A importância do estudo do conhecimento do professor está relacionada com a influência que este exerce na sua prática letiva e, consequentemente, na qualidade do ensino que presta aos seus alunos. O conhecimento que o professor usa na sala de aula é de diversos tipos, já que na sua prática letiva mobiliza conhecimentos relacionados com os conteúdos matemáticos; com os objetivos curriculares; com diversas formas de representar as ideias matemáticas para se tornarem compreensíveis para os alunos e com os desafios que os alunos podem encontrar no seu processo de aprendizagem. Isto é, o conhecimento que o professor necessita para ensinar engloba conhecimento do conteúdo, da didática e do currículo (Shulman, 1986), bem como conhecimento dos alunos e do meio educativo (Shulman, 1987). Apoiados nestes estudos, Ball, Thames e Phelps (2008) procuram clarificar os conceitos e respetivo alcance dos tipos de conhecimento anteriormente referidos. Acrescentam, ainda, que para ensinar o professor precisa de um conhecimento especializado do conteúdo, já que é esse que estabelece uma relação estreita entre conhecimento do conteúdo e prática de ensino. Assim, apresentam o conhecimento organizado em quatro domínios: conhecimento comum do conteúdo; conhecimento especializado do conteúdo; conhecimento do conteúdo e dos alunos; e conhecimento do conteúdo e do ensino. Estes autores não conseguem atingir os objetivos propostos com o seu modelo, dado o caráter estanque com que os seus domínio do conhecimento surgem. Já Ponte (2012) adota uma perspetiva integradora do conhecimento que assume a existência de um núcleo central – conhecimento da prática letiva – onde se tomam as decisões que regulam o processo de ensino, mas que se articula com outras vertentes do conhecimento (objetivos curriculares, modo como os alunos aprendem, formas de trabalho na sala de aula, recursos a disponibilizar e formas de atuação do professor) e que designa por conhecimento didático.

É fundamental que o conhecimento do professor seja encarado como um todo que resulta da articulação de diversos saberes, como os relacionados com a interpretação das ideias dos alunos, dos seus erros, das suas resoluções, avaliando quando são matematicamente válidos (Hill, Sleep, Lewis, & Ball, 2007), assim como o que os alunos já sabem, pois a aprendizagem processa-se através da construção e reconstrução de novas ideias a partir de outras preexistentes (NCTM, 2007). Para o desempenho desta prática, é importante que os professores conheçam e compreendam bem a Matemática que ensinam, o que implica saber mais do que resolver as situações que vão ser propostas aos alunos e do que um conjunto de regras e procedimentos. Os professores precisam de um conhecimento que lhes permita criar representações, selecionar tarefas e questões a colocar aos alunos, dar explicações e levar os alunos a fazer Matemática com compreensão, ajudando-os a evoluir para níveis de maior complexidade em termos de conhecimento e de linguagem matemática.

A atuação do professor em sala de aula, na condução das discussões, é, naturalmente, influenciada pelo seu conhecimento e concretiza-se num conjunto de ações que fomentam essa discussão (Rota & Leikin, 2002), através do convite endereçado aos alunos para a apresentação de diversas estratégias, para a argumentação sobre os raciocínios dos colegas e sistematização de ideias que resultam do processo de negociação de significados matemáticos. Nesta linha, Cengiz e colegas (2011) referem três ações de ensino que apoiam a condução de uma discussão: *i)* as que levam os alunos a partilhar ideias, *ii)* as que apoiam o trabalho que os alunos estão a desenvolver, e *iii)* as que ajudam os alunos a compreender melhor determinado assunto. Ainda assim, dinamizar uma discussão matemática não é uma tarefa fácil e pode provocar nos professores algumas tensões como, por exemplo, ouvir um aluno em particular e manter a turma em atividade, conciliar a explicação de regras e procedimentos com a resolução de outros alunos e encontrar conteúdos que permitem promover a discussão e ao mesmo tempo ensinar competências básicas (Yerushalmy & Elikan, 2010). Sherin (2002a) refere, ainda, que os professores também encontram tensões quando procuram o equilíbrio entre manter uma cultura de sala de aula que proporcione a apresentação de diversas ideias matemáticas e garantir que essas ideias são matematicamente significativas. A estas tensões podem ainda acrescentar-se outras, como a decisão sobre *Quem deve falar*?, *Quando*?, *Porquê*?, *Quem não deve falar e porquê*? (NCTM, 2007).

Em suma, a relevância deste estudo resulta da importância que as orientações curriculares reconhecem a esta prática letiva para a aprendizagem dos alunos, numa abordagem de ensino-aprendizagem de natureza exploratória, ao permitir que estes apresentem os resultados do seu trabalho, sobre tarefas propostas pelo professor, e se envolvam no processo de argumentação sobre as ideias que estão a ser partilhadas e que exigem a negociação de significados para a sistematização do conhecimento emergente deste processo. As discussões relacionam-se bem com as orientações curriculares para o ensino do tema da Álgebra, porque favorecem um ensino voltado para a partilha de ideias e envolvimento dos alunos no processo de representação dessas ideias, que faz emergir a generalização e a simbolização, características marcantes da Álgebra no 3.º ciclo do ensino básico. Por último, as discussões afirmam-se, assim, como uma ferramenta importante para o ensino, mas é necessário saber mais acerca da forma como os professores as promovem e o conhecimento que precisam de mobilizar nessa dinamização, tornando-se fundamental compreender melhor este processo e a dinâmica que pressupõe na promoção de ensino voltado para a compreensão.

Motivação

As discussões matemáticas têm vindo a ganhar uma crescente importância enquanto instrumento para promover a aprendizagem dos alunos, dado que colocam em jogo as dinâmicas das interações sociais e o processo de negociação de significados matemáticos. De facto, na abordagem de ensino-aprendizagem de natureza exploratória, o aluno é responsável pela realização de um conjunto de tarefas, individualmente ou em grupo, pela apresentação das suas ideias, pelo comentário às ideias dos colegas, pelo envolvimento na discussão e na construção de conhecimento matemático, a partir da sua participação nessas atividades e também dos seus conhecimentos prévios. Neste tipo de ensino, o professor deixa de assumir o papel principal de "transmitir" conhecimento matemático para assumir o papel de criar e gerir ambientes de aprendizagem onde os alunos trabalham ativamente na resolução e discussão de tarefas e ideias matemáticas. Este trabalho é fundamental para a construção do conhecimento dos alunos, porque, durante este processo, eles são incentivados a justificar, a argumentar, a apresentar exemplos, a relacionar ideias, a mobilizar conhecimentos prévios e a negociar significados para as novas ideias que emergem da discussão. As discussões surgem, assim, com potencial para promover a aprendizagem da Matemática com compreensão. Neste sentido, a minha escolha do tema das discussões matemáticas para objeto de estudo decorre desta minha perspetiva sobre as potencialidades que esta abordagem ao ensino pode oferecer à aprendizagem da Matemática.

Em Portugal, embora o ensino da Matemática tenha passado por diversas reformas curriculares durante o desenvolvimento desta investigação, as discussões matemáticas mantêm-se nos documentos curriculares enquanto ferramenta importante para promover a aprendizagem da Matemática. O envolvimento dos alunos em discussões matemáticas ganha visibilidade no ensino e aprendizagem da Matemática com o Programa de Matemática do Ensino Básico, datado de 2007, que traz para primeiro plano o desenvolvimento de diversas capacidades transversais, de forma articulada com a abordagem dos conteúdos matemáticos, valorizando a expressão e discussão de ideias. Segundo este documento curricular, é finalidade do ensino da Matemática que os alunos compreendam conceitos e procedimentos, mas também que sejam capazes de os mobilizar para a resolução de problemas, comunicando e justificando aos outros os seus raciocínios, relacionando ideias e desenvolvendo as suas capacidades de argumentação, de abstração e de generalização (ME, 2007). A discussão é apresentada, neste documento curricular, como um elemento da comunicação matemática que deve permitir o confronto de diferentes estratégias e a construção de um repertório de estratégias, a identificação de raciocínios desenvolvidos pelos alunos, a sistematização de ideias, o estabelecimento de diversas conexões, a reflexão, a justificação e a argumentação (ME, 2007).

Em 2013, surge o Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico, reformulação ao documento curricular de 2007 em termos de conteúdos programáticos e de abordagens metodológicas, mas que continua a apresentar indícios da importância das discussões no ensino e aprendizagem da Matemática: "Os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas" (ME, 2013, p. 8). Mais recentemente, em 2017, é divulgado o documento *Aprendizagens Essenciais em articulação com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, onde se pode ler que o ensino da Matemática deve permitir que os alunos "desenvolvam a capacidade de comunicar em Matemática, por forma a serem capazes de descrever, explicar e justificar, oralmente e por escrito, as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões que obtêm" (ME, 2018, p. 2).

Apesar destas mudanças curriculares no ensino da Matemática, o tema das discussões mantém-se, explícita ou implicitamente, nas orientações curriculares, desde o Programa de Matemática de 2007, marco importante no ensino da Matemática, ao trazer uma nova visão sobre o papel dos alunos e dos professores no ensino e na aprendizagem desta área do conhecimento. Nesta abordagem ao ensino da Matemática, o professor passa a desempenhar um papel importante na escolha das experiências que proporciona aos alunos, no apoio que presta ao seu trabalho e na forma como conduz as discussões, nas quais os alunos partilham, clarificam e formalizam as suas ideias, já que esta estratégia de ensino "não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula" (Ponte, 2005a, p. 14). Para concretizar este tipo de trabalho, o professor é particularmente importante na seleção das tarefas a apresentar, na definição do modo de trabalho dos alunos nestas tarefas, nos materiais a disponibilizar, na definição dos momentos de apresentação de informação e na criação de oportunidades de apresentação, discussão e sistematização de ideias.

Em paralelo com a introdução do Programa de Matemática de 2007 e da nova visão sobre o ensino da Matemática, surge, no nosso país, um Programa de Formação Contínua para Professores de Matemática dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (PFCM), que decorre entre 2005 e 2011, onde participei como formadora. Com o meu envolvimento nesse programa de formação, tive oportunidade de partilhar experiências de formação e de refletir sobre diversos temas de investigação em educação matemática nos encontros de formadores promovidos por esse programa. Foi num desses encontros que debati a temática das discussões matemáticas relativas à fase de preparação da discussão, onde analisei diversas resoluções de alunos e pensei numa possível sequenciação para a sua apresentação em sala de aula e relações a estabelecer entre elas.

No âmbito do PFCM tive, ainda, oportunidade de experienciar outro momento importante das discussões matemáticas – a condução de discussões em sala de aula. Esse acompanhamento permitiu constatar que promover discussões matemáticas como ponto de partida para a construção do conhecimento dos alunos é um processo delicado e difícil para os professores, mas com grandes potencialidades para a aprendizagem da Matemática. De facto, quando os alunos apresentavam e justificavam as suas ideias matemáticas, muitas vezes em consequência do trabalho realizado em torno de uma tarefa resolvida em pares ou em pequenos grupos, e argumentavam sobre as ideias dos colegas, estavam a aprofundar e a ampliar o seu conhecimento, desenvolvendo uma melhor compreensão da Matemática. Contudo, esse acompanhamento aos professores em sala de aula também me permitiu verificar que conduzir uma discussão em sala de aula é uma tarefa exigente, sendo preciso saber que ideias dos alunos seguir e como as relacionar, de modo a conduzi-los aos objetivos definidos para essa aula e para o aprofundamento e ampliação das suas ideias matemáticas, assim como manter todos os alunos envolvidos na discussão. Essa complexidade também foi referida pelos próprios professores, nas sessões de grupo do PFCM quando refletiam sobre as suas aulas.

As dificuldades apontadas e evidentes na atuação, em sala de aula, dos professores acompanhados nesse programa de formação, foram muito semelhantes às vividas pelos futuros professores do ensino básico que acompanhei na sua iniciação à prática profissional, durante o meu percurso profissional pelo ensino superior, entre 2003 e 2013, quando trabalhei em cursos de formação inicial de professores do ensino básico.

Na minha prática letiva, no ensino básico e secundário, desde 2013, experienciei e continuo a viver, igualmente, os sucessos e as dificuldades da condução de uma discussão matemática. De facto, também sinto, muitas vezes, dificuldade em saber gerir as diversas ideias que os alunos apresentam, de forma a atingir os objetivos que defini para aquela aula e levar os alunos a desenvolver uma melhor compreensão da Matemática. No fim de cada aula, e por vezes no seu decorrer, é frequente questionar-me sobre determinadas opções, por exemplo, a forma como segui determinada ideia de um aluno, como levei a turma a relacionar as ideias que estavam a ser apresentadas, o tipo de questionamento formulado, as justificações solicitadas e a sistematização feita. Esta reflexão sobre a minha prática decorre, também, da preparação que faço das aulas, em especial do momento de discussão e síntese de ideias, que apoia a minha atuação em sala de aula, fundamentalmente, na tomada de certas decisões. Embora pense em possíveis estratégias que os alunos possam desenvolver é extremamente difícil antecipar todos os seus raciocínios. O aparecimento de novas ideias implica uma mudança de rumo perante o que eu tinha inicialmente previsto e levam-me, posteriormente, a refletir sobre a minha atuação, a redefinir determinadas opções e melhorar a minha prática futura. Deste modo, torna-se, assim, fundamental, para mim, compreender melhor as discussões matemáticas e a dinâmica que pressupõem, clarificando-se o caminho a seguir neste processo em aulas de ensino exploratório, onde o professor é desafiado a conduzir discussões matemáticas produtivas e a envolver os alunos numa comunidade matemática reflexiva, onde todos partilham as suas ideias, argumentam e constroem significados matemáticos.

O interesse pelo estudo deste tema resulta, pois, de as discussões promoverem o questionamento entre os alunos, a explicação (Bray, 2011), a partilha de ideias (Bussi, 1998), a justificação, a argumentação e a demonstração (Hufferd-Ackles, Fuson, & Sherin, 2004), constituindo, assim, momentos fundamentais para a negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento, a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas (Ponte, 2005a).

Para a realização deste estudo opto pelo trabalho colaborativo com um grupo de três professores do 3.º ciclo do ensino básico, em resultado da minha experiência profissional em programas de formação e de realização de cursos de formação contínua. De facto, essa forma de trabalho tem proporcionado diversos momentos de reflexão em torno da partilha de diversas experiências e vivências, que contribuíram para o desenvolvimento profissional de todos. Esses momentos de trabalho em grupo, onde se preparavam situações de ensino e se analisavam e discutiam episódios de sala de aula, a partir da perspetiva dos professores e da minha, salientam as potencialidades dessa forma de trabalho para a reflexão e desenvolvimento das nossas práticas de ensino. O trabalho colaborativo surge, assim, neste estudo, como um contexto favorável à realização da investigação, gerando a possibilidade de estudar os professores, de modo a compreender como eles se desenvolvem nas suas práticas de discussão, ao longo de um período alargado de tempo, mobilizando e incrementando o seu conhecimento na condução dessas discussões, tendo em vista a aprendizagem dos alunos.

Neste trabalho, o estudo do conhecimento do professor é fundamental, já que se revela em diversas vertentes da orquestração da discussão, como na preparação que faz da discussão, na forma como explora as distintas resoluções apresentadas pelos alunos, no modo como as relaciona e envolve os alunos no processo de negociação de significados e como reflete sobre o seu processo de planificação e atuação em sala de aula. Assim, é indispensável que o professor possua um conhecimento que lhe permita compreender dificuldades dos alunos, conhecer exemplos e representações que os alunos possam usar e explicações a dar para determinados conceitos, assim como raciocínios que os alunos podem desenvolver e relações a estabelecer entre resoluções.

Nas sessões de trabalho colaborativo pretendo que o conhecimento profissional saia reforçado, fundamentalmente, sobre a dinamização das discussões matemáticas. De facto, é nestes momentos de trabalho em que se preparam aulas, com particular ênfase nos momentos de discussão, e se refletem, posteriormente, que se tem contacto com diversas perspetivas que vão permitir desenvolver uma melhor compreensão sobre o papel das discussões na aprendizagem da Matemática e na forma de as promover nas aulas. A investigação sobre as práticas e conhecimento dos professores que pretendo realizar neste contexto colaborativo, é essencial, porque desempenha um papel orientador na atuação do professor em sala de aula. De facto, essas práticas envolvem um conjunto de aspetos interligados (discurso, ações, tarefas, negociação de significados) que, no seu todo, contribuem para as experiências que o professor proporciona aos seus alunos e, consequentemente, para a qualidade do ensino-aprendizagem. A opção por trabalhar com professores do 3.º ciclo do ensino básico está relacionada com a minha formação e experiência profissionais neste ciclo de ensino, que me proporcionam um ponto de partida que será útil mobilizar, mas, principalmente, porque o papel das discussões matemáticas como meio de ensinar é ainda pouco conhecido neste nível de ensino.

O estudo está focado, numa abordagem de ensino de natureza exploratória, no tema das discussões matemáticas no âmbito do tema da Álgebra, no 3.º ciclo do ensino básico. A escolha deste tema matemático, em particular do desenvolvimento do pensamento algébrico através das discussões, está relacionada com a sua relevância na aprendizagem dos alunos e também com o meu interesse particular por este assunto. Por isso, o trabalho de colaboração proposto aos professores participantes no estudo assume este meu interesse, que fez parte do trabalho planeado e negociado ao longo de todo o processo.

O tema da Álgebra, no 3.º ciclo do ensino básico, está bastante vincado no Programa de Matemática e enfatiza o estabelecimento de diversas conexões com os outros temas. A sua escolha é ainda reforçada pela importância que as orientações curriculares atribuem à generalização, à simbolização e ao estudo de relações, funções e variações que não é compatível com uma forma de trabalho rotineira através da manipulação simbólica. A generalização e a simbolização são aspetos do pensamento algébrico que colocam, normalmente, grandes dificuldades aos alunos, o que reforça a minha escolha por este tema matemático, com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de um trabalho focado nas discussões matemáticas.

Adicionalmente, o interesse pelo tema da Álgebra resulta também de se considerar que as discussões neste tema matemático são difíceis de iniciar e manter porque há uma grande preocupação com os símbolos e os procedimentos e não com a discussão de ideias importantes, como acontece, por exemplo, na Geometria (Yerushalmy & Elikan, 2010). Neste sentido, um conhecimento do professor amplo e profundo é necessário para apoiar a sua atuação em sala de aula na criação de ambientes de aprendizagem onde os alunos aprendam Matemática com compreensão.

O interesse pelo estudo das discussões no âmbito da Álgebra no 3.º ciclo do ensino básico, em particular nos 7.º e 8.º anos, justifica-se pela força que este tema tem no currículo atual em Portugal, onde se abordam, entre outros, os tópicos Sequências e regularidades, Funções e Equações. Os tópicos Funções e Equações introduzem conceitos, linguagem e terminologia completamente novos, enquanto o tópico Sequências e regularidades aprofunda as ideias trabalhadas nos ciclos anteriores, formalizando a linguagem utilizada até aí para a expressão das leis de formação e para o cálculo de termos próximos e distantes, exigindo-se maior rigor na linguagem matemática utilizada e na expressão do termo geral – generalização. Este tema matemático relaciona-se fortemente com os outros, ao favorecer a generalização de determinadas propriedades aritméticas e geométricas, contribuindo para o desenvolvimento de uma melhor compreensão da Matemática.

Objetivo e questões do estudo

As discussões matemáticas estão a afirmar-se no ensino da Matemática que pressupõe modos colaborativos de aprendizagem, entre alunos e alunos-professor, na medida em que se perspetivam como conversas sobre ideias matemáticas que supõem a interação entre alunos e professor, onde os alunos são convidados a exporem, explicarem e justificarem os seus raciocínios, que são alvo de análise e avaliação pelos outros. Neste quadro, o professor é responsável pela criação destes momentos em que os alunos têm oportunidade de exporem e justificarem as suas ideias, argumentando com os seus colegas e o professor, envolvendo-os na negociação de significados. Ora, este é, notoriamente, um processo complexo e exigente que coloca sérias dificuldades aos professores. A preparação cuidada desse momento da aula é essencial para apoiar a atuação do professor na condução da discussão matemática. De facto, quando o professor antecipa possíveis resoluções dos alunos e dificuldades que eles possam apresentar e pensa como os pode orientar, presta um apoio mais eficaz ao trabalho autónomo dos alunos em sala de aula, mesmo não sendo possível prever todas as suas dificuldades e estratégias. No acompanhamento que faz a esse trabalho autónomo, e que antecede a dinamização da discussão, o professor identifica ideias potencialmente fortes para serem partilhadas e discutidas com a turma. A discussão inicia com os alunos a apresentarem diversas ideias que o professor seleciona, segue e relaciona, levando os alunos a justificar, a argumentar, a juntar contributos e a questionarem-se uns aos outros, de modo a aprofundarem e ampliarem o seu pensamento e a desenvolverem uma melhor compreensão da Matemática. As ideias matemáticas que emergem da discussão, e que são aceites pelo coletivo, são sistematizadas pelo professor em conjunto com os alunos e são também ligadas a ideias prévias, constituindo-se em conhecimento individual e coletivo.

A colaboração profissional é especialmente adequada para fazer face às dificuldades ou à introdução de novas metodologias de ensino, como é a concretização de um estilo de ensino de natureza exploratória, assente na realização de discussões matemáticas no trabalho com a Álgebra, numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico, no 3.º ciclo do ensino básico. De facto, este contexto de trabalho colaborativo pode proporcionar aos professores boas condições para abordar as discussões matemáticas, assente num processo de construção mútuo, onde é valorizada a individualidade de cada um dos atores, no ensino da Álgebra – um tema matemático que ganhou relevância nas orientações curriculares, principalmente, na sua abordagem com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico, enfatizando a simbolização e a generalização. Assim sendo, é objetivo deste estudo compreender como professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico, num contexto de trabalho colaborativo, desenvolvem o seu conhecimento didático e as suas práticas letivas na preparação e dinamização de discussões matemáticas coletivas no ensino da Álgebra.

Para atingir este objetivo, e tendo em conta o contexto colaborativo em que o estudo decorre, apresento quatro questões orientadoras que procuram captar o processo de desenvolvimento dos professores participantes:

- De que forma os professores preparam a discussão coletiva, antes e durante a aula, tendo em vista o ensino da Álgebra?
- Como é que os professores organizam a discussão coletiva em sala de aula e como promovem o envolvimento dos alunos nessa discussão?
- Quais as ações de ensino que os professores implementam na condução da discussão, como se articulam e que propósitos têm em vista?
- Como é que os professores desenvolvem e mobilizam o seu conhecimento didático na preparação e na dinamização da discussão coletiva visando o ensino da Álgebra?

Organização do trabalho

O presente documento encontra-se organizado em duas secções principais, uma relativa ao quadro teórico, enquadramento e objetivos do estudo e outra à parte empírica do estudo. A primeira parte engloba quatro capítulos: Introdução; Discussão na aula de Matemática; Práticas e conhecimento profissional; e Desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico. A segunda parte desenrola-se ao longo de sete capítulos: Metodologia de investigação; Contexto do estudo; A professora Ana; O professor Jorge; O professor Afonso; Discussão coletiva: a prática e o conhecimento dos professores; e Conclusão.

No primeiro capítulo – Introdução – enquadro o estudo, apresento as motivações que desencadearam a realização do estudo, o objetivo do estudo e as respetivas questões de investigação. No segundo capítulo – Discussão na aula de Matemática – analiso algumas práticas de discussão, depois de clarificar o conceito e de o enquadrar na abordagem de ensino-aprendizagem de natureza exploratória, salientando o processo comunicativo que está na base de uma discussão e que favorece a negociação de significados.

No terceiro capítulo – Práticas e conhecimento profissional – estudo o conceito de prática profissional, salientando alguns elementos estruturantes das práticas letivas e discuto o conhecimento necessário para o exercício da função de ensinar, em particular o conhecimento do professor de Matemática, já que esse conhecimento desempenha um papel importante no ensino e na aprendizagem dessa disciplina e, em particular, na forma como organiza e promove discussões coletivas. No quarto capítulo – Desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico – discuto os principais aspetos a ter em consideração na lecionação do tema matemático Álgebra, com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. É neste tema matemático que os professores preparam e conduzem discussões matemáticas, a partir de tarefas algébricas cuidadosamente selecionadas para o efeito. Neste sentido, é importante conhecer as principais orientações para a abordagem deste tema com os alunos, a fim de lhes proporcionar aprendizagens significativas. Este capítulo revela também a sua pertinência para a definição do trabalho a desenvolver com o grupo colaborativo, estabelecendo linhas de força a abordar com os professores para desenvolverem o pensamento algébrico dos seus alunos, através da sua participação em discussões.

A segunda parte do trabalho inicia com o capítulo cinco – Metodologia de investigação – dedicado à apresentação das opções metodológicas e do dispositivo de estudo, que se baseia no trabalho colaborativo com três professores do 3.º ciclo do ensino básico. Também refiro neste capítulo os critérios da escolha dos participantes do estudo, descrevo os instrumentos de recolha de dados e caracterizo e justifico o processo de análise de dados. O sexto capítulo – Contexto do estudo – mostra o trabalho desenvolvido na oficina de formação, bem como o balanço desse mesmo trabalho. Neste capítulo, apresento, ainda, o grupo colaborativo e o trabalho desenvolvido nele.

Os três capítulos seguintes apresentam os casos do estudo: A professora Ana, o Professor Jorge e o Professor Afonso. Cada capítulo começa com a descrição do percurso profissional de cada professor, seguido da apresentação das suas práticas de discussão de preparação e dinamização em sala de aula. As práticas de discussão de cada professor são analisadas de forma integrada com o seu conhecimento didático. No décimo capítulo – Discussão coletiva: a prática e o conhecimento dos professores – apresento uma análise cruzada dos três casos do estudo, de acordo com as questões orientadoras do estudo, de forma a compreender a dinamização de discussões coletivas em Matemática. No último capítulo – Conclusão – respondo às questões do estudo, aponto pistas para estudos futuros e finalizo com uma reflexão global sobre o trabalho desenvolvido

CAPÍTULO II

Discussão na aula de Matemática

Neste capítulo, organizado em três secções, analiso, na primeira, o conceito de discussão matemática enquadrado no modelo de aula de ensino de natureza exploratória, onde a negociação de significados desempenha um papel fundamental na construção do conhecimento matemático. Neste tipo de aula, onde a comunicação matemática é enfatizada e onde os alunos são convidados a partilhar e a negociar ideias, emergem comunidades de discurso matemático, nas quais procuro compreender como professores e alunos interagem numa discussão coletiva, estudando um conjunto de práticas, ao longo da segunda secção. O desenvolvimento dessas práticas gera, naturalmente, tensões nos professores que, para as ultrapassarem, têm que revelar flexibilidade na sua atuação em sala de aula, observável nos padrões de interação que se estabelecem, sintetizados na terceira secção.

Discussão matemática e comunidades de discurso

O termo discussão não é exclusivo da Matemática e é usado no dia-a-dia com diferentes significados, como conversa, troca de ideias, polémica, controvérsia, pressupondo a interação de, pelo menos, duas pessoas com pontos de vista distintos, que têm na discussão a oportunidade de defender as suas ideias, clarificá-las e procurar entendimentos.

Em sala de aula, uma discussão é: *i)* para professores de estudos sociais, uma recitação, uma conversa conduzida pelo professor, uma conversa aberta, um conjunto de respostas a perguntas desafiadoras, uma transferência de conhecimento para o exterior da sala de aula e uma prática que envolve interações verbais (Larson, 2000); e *ii)* para alunos do primeiro ano da universidade de um curso de iniciação à leitura e à escrita de drama e poesia, contextos onde ocorrem múltiplas relações e onde uma boa discussão implica um assunto interessante, o envolvimento de toda a turma e deve permitir oferecer algo aos outros participantes (Goldblatt & Smith, 1995). Os professores estudados por Larson (2000) encaram a discussão, essencialmente, como *i)* um método de ensino, com a finalidade de ajudar os alunos a envolverem-se na aula e a aprenderem, provocando reações, estabelecendo analogias, proporcionando múltiplas perspetivas, conduzindo-os a pensar sobre as ideias apresentadas e incentivando interações verbais; e como *ii)* uma forma de ajudar os alunos a interagirem uns com os outros, onde se espera que aprendam a envolverem-se em discussões cada vez mais produtivas. As discussões são consideradas por esses professores como formas de aprendizagem, onde os alunos desenvolvem uma melhor compreensão dos conceitos através da partilha, explicação e relacionamento de ideias e não da mera memorização de um conjunto de factos e procedimentos; e aprendem a "discutir" e a tomar decisões enquanto grupo-turma. O propósito da segunda conceção é o processo de diálogo que contribui, segundo esses professores, para a formação de cidadãos mais democráticos, que viverão melhor em sociedade, porque serão capazes de respeitar e valorizar ideias diferentes das suas. Em linha com estas perspetivas, Selling e colegas (2015), definem discussão em sala de aula como um período sustentado de diálogo entre alunos e professor e onde as ideias são usadas para desenvolver uma compreensão coletiva. Uma discussão pode, também, ser apresentada como uma conversa produtiva onde o professor tenta levar os alunos a partilharem as suas ideias, explicando-as e juntando contributos, com o objetivo de ampliar o pensamento dos alunos. Neste tipo de conversa, onde o objetivo é maximizar a oportunidade de os alunos aprenderem, o professor não está preocupado com a resposta certa, mas com o raciocínio do aluno (Chapin et al., 2003). Em todas as perspetivas apresentadas existem elementos que são comuns, como: conversa entre dois tipos de participantes, com funções diferentes na interação mas com o propósito de desenvolver uma melhor compreensão sobre o assunto em debate.

Em Matemática, uma discussão é uma *conversa com propósito* (isto é, foram definidos objetivos que foram aceites, direta ou indiretamente, pelo grupo) *sobre um assunto matemático* (ou seja, no decorrer da conversa emergem ideias matemáticas), *na qual os alunos dão contributos genuínos* (isto é, os alunos não se limitam a responder às questões do professor, mas introduzem ideias novas) *e interagem* (os alunos envolvem-se na discussão, não se limitando a ser ouvintes passivos, mas fazendo comentários que refletem uma escuta crítica) (Pirie & Schwarzenberger, 1988).

Na perspetiva Vygotskiana, as discussões matemáticas são entendidas como uma articulação entre diferentes vozes (que representam uma perspetiva individual como membro próprio de uma cultura e de uma sociedade), como numa polifonia (Bussi, 1996, 1998). Essa metáfora musical traduz bem essa visão que encara as discussões como um emprego simultâneo de diversas vozes que não se pronunciam em uníssono sobre um determinado assunto matemático, onde o professor desempenha um papel muito importante na sua orquestração e na introdução de diferentes perspetivas das apresentadas pelos alunos (Pirie, 1998). Essa visão distancia-se da perspetiva construtivista fortemente associada à ideia de construção individual do conhecimento, a partir dos pensamentos e ações do aluno, que é responsável pela sua aprendizagem e contrasta com a de Pirie e Schwarzenberg (1988), na medida em que tem subjacente outras caraterísticas, como o valor positivo dado à imitação, já que pressupõe a presença de diferentes vozes entre as quais a do professor é representativa. Contudo, em ambas as visões (de Vygotsky e de Pirie e Schwarzenberg), as discussões matemáticas enfatizam a interação e focam-se num assunto explícito que conduz a atividade matemática.

Na mesma linha de Pirie e Schwarzenberg (1988), McNair (2000) e Ponte (2005a) também defendem que uma discussão matemática deve obedecer aos critérios assunto e propósito, frisando que o assunto apesar de determinar sobre o que se fala não garante um propósito matemático, porque não explica aos alunos por que estão a manter essa conversa. Nesse sentido, é importante que os alunos conheçam claramente os objetivos que se pretendem atingir, uma vez que uma determinada situação pode ser resolvida sem se recorrer a conhecimentos matemáticos, por exemplo, por tentativa e erro. Assim, uma discussão "tem sempre um objetivo, por exemplo, a estratégia a seguir para a realização de uma tarefa, a avaliação de uma dada solução, o balanço do trabalho realizado ao longo de todo um período" (Ponte, 2005a, p. 16), bem como refletir sobre várias soluções, analisar resoluções específicas e considerar métodos mais eficientes (Cengiz, 2013). Contudo, para McNair (2000) uma discussão também deve ter em conta o critério estrutura, já que numa discussão os participantes são guiados por um conjunto de crenças, valores e expectativas que definem o seu quadro de Matemática e que está relacionado com a forma como cada um interpreta uma dada situação.

Para McCrone (2005), as discussões devem, ainda, contemplar a competência comunicativa, ou seja, os alunos devem aprender a participar numa discussão, que inclui, por exemplo, as ações a desenvolver. Ensinar os alunos a envolverem-se em discussões produtivas exige tempo e treino, já que os alunos precisam sentir-se à vontade para participar, discordar, ouvir, respeitar as ideias dos outros (Larson, 2000), apresentar uma variedade de respostas e elaborar as suas próprias ideias (Rawding & Wills, 2012). Nesse sentido, Clayton (2014) defende que para fomentar discussões matemáticas produtivas é fundamental que o professor: *i)* promova um ambiente compatível com o envolvimento dos alunos em discussões, ou seja, os alunos devem conhecer o seu papel e o professor deve colocar questões, facilitar diálogos e promover a reflexão; *ii)* ensine aos alunos o que é esperado com a sua participação na discussão, isto é, apresentar e explicar os seus raciocínios aos colegas, que devem ouvir, avaliar, argumentar e solicitar esclarecimentos; *iii)* apresente problemas significativos e com contextos relevantes para os alunos, que envolvam conceitos matemáticos importantes, admitam diversas estratégias de resolução, promovam o raciocínio e levem à justificação; *iv)* construa oportunidades de trabalho individual e de grupo, onde os alunos tenham oportunidade de trocar ideias com os colegas; *v)* facilite a apresentação de diversas estratégias de resolução, encorajando os alunos a apresentar e a defender as suas ideias; e *vi)* fomente a reflexão dos alunos sobre as diferentes estratégias apresentadas, individualmente ou em pequenos grupos.

Na mesma linha, Chapin e colegas (2003) apontam cinco princípios para promover discussões que fortalecem o pensamento e o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula: primeiro – estabelecer e manter um ambiente de respeito e solidariedade, já que é importante que os alunos se sintam à vontade para participar, sem medo de serem gozados; segundo – focar a conversa na Matemática, com vista a que os alunos compreendam que o objetivo é ajudá-los a desenvolver atividade matemática; terceiro – promover a participação equitativa na sala de aula, garantindo que todos participam na conversa, direta ou indiretamente (ouvindo), já que todos podem beneficiar com isso; quarto – explicar expectativas sobre novas formas de falar, ou seja, é importante que os alunos compreendam o que é esperado deles, já que para alguns essa forma de participar na aula pode ser nova; e quinto – criar desafios novos em certos momentos, de modo a envolver os alunos na conversa, mas garantindo que as ideias anteriores foram compreendidas. Bahr e Bahr (2017) propõem quatro estratégias que consideram efetivas para promover o envolvimento dos alunos na discussão:

primeira – informar os alunos sobre o objetivo da discussão, ou seja, em que aspetos devem prestar atenção durante a partilha de ideias, refletindo sobre essa partilha; segunda – ensinar os alunos a envolverem-se na escuta, fazendo perguntas pertinentes aos colegas; terceira – convidar os alunos a responder durante e depois de cada partilha, chamando determinados alunos a responder, com vista a aumentar a sua responsabilidade enquanto ouvintes; e quarta – ter rotinas preparadas previamente para quando os alunos não respondem, já que se isso acontece é porque a tarefa pode não ter sido interessante ou significante para eles, ou não ter sido adequada ao seu nível etário; podem não ter compreendido o que foi partilhado; ou podem não ter prestado atenção. Nestas duas últimas situações, é importante que o professor ensine o aluno a interpelar os colegas, a interrogar, a procurar obter esclarecimentos e a pedir para repetir.

A realização deste tipo de trabalho é fundamental, na medida em que os alunos que acreditam que a participação nas discussões em sala de aula contribui para a aprendizagem estão mais recetivos a falar sobre a Matemática do que os outros, caso contrário contribuem apenas nas conversas que envolvem aspetos processuais (cálculos e procedimentos) e não conceptuais (Jansen, 2008). Dessa forma, é importante que o professor prepare as discussões com vista a garantir o envolvimento dos alunos em interações verbais (Larson, 2000).

O processo comunicativo que se gera em torno de diversas perspetivas individuais faz surgir, enquadradas na teoria de Vygotsky da aprendizagem, as conversas instrucionais (*instructional conversations*) que são abordagens pedagógicas das discussões em sala de aula, que têm como objetivo promover o desenvolvimento conceptual dos alunos, a capacidade de análise, reflexão e pensamento crítico (Goldenberg, 1991). Nesse tipo de conversas, o professor incentiva a partilha de ideias, ouve os alunos atentamente, faz suposições acerca dos seus contributos e relaciona múltiplas perspetivas, de modo a que os alunos atinjam níveis cada vez mais sofisticados de compreensão matemática (Moschkovich, 2008). Essas conversas podem também incluir respostas por parte do professor, com vista ao esclarecimento e aprofundamento das ideias dos alunos.

As conversas instrucionais são caracterizadas por duas dimensões principais que se relacionam, a dimensão instrucional e a dimensão conversacional (Goldenberg, 1991). A primeira revela-se na intencionalidade da conversa, sendo conduzida pelo professor com vista a atingir o objetivo proposto, e a segunda na interação entre os participantes. Os elementos conversacionais são sensíveis à introdução de novas ideias na discussão, já que grande parte das situações propostas aos alunos admitem diferentes resoluções que os professores procuram integrar na discussão, relacionando-as e mantendo a coerência da conversa.

As salas de aula onde os alunos são incentivados a partilhar e negociar ideias, a responder a questões levantadas pela turma e onde o professor faz perguntas para facilitar diálogos e promover novas ideias matemáticas, designam-se por "comunidades de discurso matemático" (Sherin, 2002a). Para esta autora, é fundamental compreender nessas comunidades o modo como o professor e os alunos se envolvem na discussão em grande grupo, isto é, como interagem – processo de discurso – e as ideias matemáticas presentes nos seus comentários, questões e respostas – conteúdo do discurso. É nesse processo de interação, no qual professor e alunos se envolvem com vista a atingir um certo fim que a negociação de significados emerge. Para que essa negociação seja efetiva, é importante que o professor não exerça demasiada autoridade nem limite os seus comentários a certo e errado, mas crie momentos onde os alunos se sintam à vontade para exteriorizar, justificar, clarificar e confrontar ideias (Bishop & Goffree, 1986), para que estabeleçam relações entre as ideias que estão a ser discutidas e os seus conhecimentos prévios, que favorecem a construção de novo conhecimento. Para tal, é importante que a cultura de sala de aula permita fazer e responder a questões e pedir e dar justificações, explicações e exemplos, num ambiente em que os alunos se habituam a contribuir com frequência, a dar oportunidade para os outros também colaborarem, a respeitarem todas as ideias partilhadas, a pedir esclarecimentos sobre os contributos apresentados e a argumentar (Bishop & Goffree, 1986). As questões abertas são um bom meio para envolver os alunos em comunidades de discurso. Contudo, é importante que os professores depois de colocarem uma questão dêem tempo aos alunos para pensarem antes de solicitarem uma resposta (Menezes, Guerreiro, Martinho, & Ferreira, 2013; Rawding & Wills, 2012).

No contexto do ensino de natureza exploratória, o desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático é algo exigente, já que pressupõe compreender e ampliar o pensamento de cada um, sendo o discurso usado para apoiar a aprendizagem matemática de todos os participantes (Hufferd-Ackles et al., 2004), porque significa troca de pensamentos e de informação num ambiente de aprendizagem que usa linguagem matemática formal ou informal (McCrone, 2005). O discurso envolvido nessas comunidades não antevê envio de conhecimento numa só direção, mas prevê diálogo entre pelo menos duas vozes, onde a comunicação é usada como um dispositivo do pensamento e onde novo significado é gerado – discurso dialógico (Truxaw & DeFranco, 2007).

Esse tipo de ensino, também designado por "ensino por descoberta" (Hammer, 1997), rompe com a visão tradicional de ensino caracterizado pela apresentação da "matéria" pelo professor seguida da resolução de exercícios pelos alunos, de um modo geral, individualmente, sucedida pela correção no quadro. Afirma-se como um ensino onde o aluno constrói o seu conhecimento dentro da comunidade de sala de aula e onde as interações e as crenças de cada um contribuem para esse desenvolvimento (McCrone, 2005). O aluno passa a ser uma autoridade na sala de aula, desempenhando um papel determinante na sua aprendizagem, já que é responsável pela realização, em pares ou pequenos grupos, de tarefas apresentadas pelo professor e pela posterior apresentação e discussão de resultados com toda a turma, onde emergem os conceitos. Nessa abordagem, é privilegiado o trabalho em pequenos grupos, sendo a comunicação e a representação, com ênfase nas ideias matemáticas e raciocínios dos alunos, também muito valorizados (Speer & Wagner, 2009).

Nessas salas de aula, onde a interação entre diferentes participantes é fundamental, privilegia-se a comunicação reflexiva e instrutiva, que se sobrepõe à comunicação unidirecional e contributiva, onde o professor domina a maior parte do discurso (Brendefur & Frykholm, 2000). A comunicação contributiva (*contributive communication*), apesar de se focar nas interações entre os alunos e alunos-professor, reduz-se à troca de ideias na resolução de uma tarefa e ao apoio prestado aos alunos no seu trabalho individual. A comunicação reflexiva (*reflective communication*) envolve partilha de ideias e nela as conversas matemáticas têm como objetivo não apenas a troca de ideias, mas atingir maior compreensão sobre o que está a ser partilhado, tendo os alunos oportunidade de refletir sobre os seus raciocínios. A comunicação instrutiva (*instructive communication*) vai além das interações entre os intervenientes que atuam na sala de aula, tendo um caráter instrumental de apoio ao ensino. Este caráter resulta do envolvimento dos alunos na discussão sobre a razoabilidade de certos resultados, da reformulação de soluções incorretas, do processo de construção de conhecimento através da resolução de tarefas matemáticas e do reconhecimento da aprendizagem dos alunos (Guerreiro, Ponte, & Serrazina, 2013). Isto é, este tipo de comunicação permite ao professor compreender como se está a processar a aprendizagem dos alunos e aos alunos reconhecer as dificuldades e as vantagens que encontram no processo comunicativo. Finalmente, a comunicação unidirecional (*uni-directional* *communication*), típica do ensino tradicional, é caracterizada pelas reduzidas oportunidades dadas aos alunos para trocarem ideias, limitando-se à formulação de questões pelo professor, que domina todo o processo.

Os tipos de comunicação apresentados têm subjacente diferentes modos de participação nesse processo, a exposição, o questionamento, a discussão (Ponte & Serrazina, 2000), a explicação e a interpretação (Bishop & Goffree, 1986). Na exposição, o interveniente apresenta uma ideia; no questionamento, os intervenientes fazem perguntas uns aos outros e na discussão interagem expondo ideias e fazendo perguntas uns aos outros. A explicação implica relacionar o que se ouve com o que se sabe e portanto revela-se um processo exigente e complexo, que permite criar múltiplas relações entre ideias. A explicação distingue-se da exposição, na medida em que pressupõe compreensão sobre as ideias apresentadas, podendo surgir do questionamento e reflexão, isto é, relacionar e atribuir significado a ideias matemáticas. Numa aula do ensino-aprendizagem exploratório, os diversos modos de comunicação devem estar presentes, favorecendo a análise em profundidade de problemas, a formulação de explicações, o uso de vocabulário ou notação nova, a argumentação, a formulação de conjeturas e a reflexão sobre as ideias partilhadas (Guerreiro, Ferreira, Menezes, & Martinho, 2015; NCTM, 2007).

As questões são, também, uma ferramenta importante da comunicação e são usadas pelo professor com diferentes objetivos: verificar o conhecimento e desenvolver o conhecimento (Menezes et al., 2013), ou seja, devem permitir levar o aluno a avançar nas suas ideias, sendo, para tal, importante que favoreçam a explicação, a síntese e o estabelecimento de conexões (Chapin et al., 2003). Assim, o professor pode recorrer a quatro tipos de questões: de verificação ou de confirmação; de focalização; de reflexão ou de inquirição (Menezes et al., 2013; Ponte & Serrazina, 2000) e de provocação (Brodie, 2010).

As questões de verificação têm como objetivo testar conhecimentos, sem encorajar o pensamento dos alunos e são, geralmente, de resposta curta e imediata, servindo, fundamentalmente, para regular a forma como os alunos aprendem. Essas questões podem, também, assumir a modalidade de completar uma resposta iniciada pelo professor, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio através da atribuição de significado a uma ideia incompleta (Menezes et al., 2013). As questões de focalização pretendem focar a atenção do aluno numa ideia específica ou num erro, assumindo, assim, uma vertente essencialmente formativa. As questões de reflexão intentam levar o aluno a desenvolver uma compreensão mais aprofundada dos seus raciocínios, através, por exemplo, da justificação, da argumentação e do relacionamento de ideias. Este tipo de questões leva os alunos a centrar o seu pensamento nas estruturas e processos matemáticos, contribuindo para a construção de novo conhecimento. As questões de provocação ajudam os alunos a pensar e a avaliar as ideias uns dos outros, já que estão associadas, fundamentalmente, ao convite para apresentação de diversas resoluções. O uso deste tipo de questões pelo professor denota que este perspetiva a comunicação como uma interação social, na qual os diversos agentes interagem, partilham ideias e constroem o conhecimento em conjunto, em oposição a uma visão tradicional da comunicação encarada como transmissão de informação, ideias e conhecimento, com o objetivo de persuadir o outro num ambiente de silêncio (Menezes et al., 2013).

Uma aula de Matemática numa abordagem de ensino exploratório que proporcione discussões matemáticas coletivas passa, normalmente, pelos seguintes momentos: *i)* apresentação da tarefa, geralmente, pelo professor; *ii)* resolução da tarefa pelos alunos, contemplando diversos modos de trabalho dependendo da natureza da tarefa; *iii)* discussão e síntese de ideias matemáticas, onde os alunos são convidados a apresentar as suas estratégias de resolução, a comparar e relacioná-las e a sistematizar as principais ideias emergentes dessa partilha (Stein et al., 2008). Nesse modelo de aula, o professor desempenha um papel determinante em todas as fases, nomeadamente, no momento de apresentação da tarefa, já que deve ser suficientemente claro na sua exposição, mas sem definir o trabalho a seguir; no apoio prestado ao trabalho autónomo dos alunos, onde deve orientar o seu trabalho formulando boas questões mas sem dar respostas; e na condução de discussões matemáticas produtivas, onde o professor tem que ser capaz de decidir quais os contributos matemáticos relevantes, os exemplos a usar ou até mesmo as resoluções incorretas a selecionar de forma a atingir os seus objetivos (Speer & Wagner, 2009), de orquestrar o discurso, proporcionando oportunidades para todos intervirem, incentivando a argumentação e a justificação e criando momentos de sistematização e formalização de ideias matemáticas (Ponte, 2011). A fase de sistematização das ideias que emergem da discussão não tem de ocorrer necessariamente depois da discussão coletiva, pode ocorrer em simultâneo (Menezes et al., 2013).

As tarefas devem ser interessantes e envolver os alunos na sua resolução, porque isso potencia o aparecimento de uma diversidade de estratégias que contribuem para discussões mais produtivas. Quando os alunos têm dificuldade em iniciar o seu trabalho autónomo, devido à fraca compreensão do enunciado da tarefa ou mesmo à sua complexidade, o professor pode começar por analisar com eles o contexto da situação, fazendo, por exemplo, perguntas de interpretação, discutir as ideias matemáticas mais relevantes, desenvolver uma linguagem partilhada para descrever as principais características da situação apresentada, levando os alunos a explicarem determinados termos mas mantendo sempre o nível cognitivo da tarefa (Jackson, Shahan, Gibbons, & Cobb, 2012). Ou seja, o professor pode recorrer à negociação de significados para ajudar os alunos a interpretar os enunciados (Ponte & Quaresma, 2016). Nesta fase da aula, as questões de verificação podem ser úteis, por permitirem trazer conhecimentos prévios necessários à interpretação da tarefa, de forma a que os alunos se possam envolver na sua resolução (Menezes et al., 2013).

A seleção das tarefas a apresentar aos alunos, embora não seja uma componente direta das fases da aula, interfere fortemente nela. Por isso, o professor é chamado a escolher tarefas matematicamente válidas, ou seja, que apelem à inteligência do aluno, ao desenvolvimento do raciocínio, da comunicação matemática e da resolução de problemas.

As tarefas podem ser analisadas tendo em conta o tipo de desafio (baixo/alto nível cognitivo), sendo as tarefas de memorização e as de procedimentos sem conexão de baixo nível cognitivo, nas quais há uma ausência de contexto, e as tarefas de procedimentos com conexão e fazendo matemática de alto nível cognitivo (Stein & Smith, 1998). Para Ponte (2005a), as tarefas podem ser classificadas tendo em conta o nível de dificuldade (elevado ou reduzido) e a natureza (aberta ou fechada) obtendo-se, assim, quatros tipos principais de tarefas: exercícios (tarefas fechadas de dificuldade reduzida); problemas (tarefas fechadas de dificuldade elevada); explorações (tarefas abertas de dificuldade reduzida) e investigações (tarefas abertas de dificuldade elevada). Já Watson e colegas (2013) entendem as tarefas matemáticas como um conjunto de “coisas a fazer” pelos alunos, acrescentando que o professor recorre às tarefas para demonstrar a Matemática, para interagir com os alunos ou para lhes pedir para fazerem algo, sendo assim encaradas como ferramentas mediadoras do ensino e da aprendizagem da Matemática. Cada tipo de tarefa tem o seu lugar na aula de Matemática, cumprindo diferentes objetivos. Contudo, as tarefas de investigação e de exploração são aquelas que mais desafios colocam aos alunos e, consequentemente, mais potencialidades podem trazer para a sua aprendizagem, favorecendo dinâmicas entre eles que levem à discussão e negociação de ideias e conceitos matemáticos, a partir da apresentação e confronto de distintas estratégias de resolução.

A seleção criteriosa das tarefas é um aspeto do trabalho do professor bastante exigente, já que a escolha de tarefas de natureza aberta pode levar os alunos a perderem-se no momento de trabalho autónomo, tarefas muito estruturadas não permitem explorar diversas estratégias, tarefas de nível de dificuldade reduzido podem levar os alunos a não investirem muito no seu trabalho e tarefas de nível de dificuldade elevado podem causar desmotivação. A escolha das tarefas depende dos objetivos que o professor pretende atingir na aula. Nesse trabalho, o professor procura ainda contemplar contextos puramente matemáticos com contextos não matemáticos.

Numa aula de ensino exploratório, as discussões matemáticas que decorrem da resolução de uma tarefa, em pares ou pequenos grupos, pressupõem a interação entre alunos e alunos-professor na partilha de diversas estratégias de resolução, de explicações, justificações e argumentações de ideias matemáticas que quando relacionadas entre si e com os conhecimentos prévios dos alunos levam à construção de significados partilhados, fazendo emergir novo conhecimento.

Práticas de discussão

A condução de discussões que têm como objetivo ampliar o pensamento do aluno, ou seja, ajudá-los a evoluir nas suas ideias iniciais desenvolvendo uma melhor compreensão dos conceitos (Cengiz et al., 2011), exige ao professor reconhecer potencial numa determinada situação, o que implica ouvir com atenção os alunos e ter objetivos bem claros sobre as ideias matemáticas a seguir e a atingir; e orquestrar a discussão de sala de aula de forma a alcançar o fim pretendido. Essa orquestração resulta da harmonia entre um conjunto de movimentos por parte do professor que servem, fundamentalmente, para articular o pensamento matemático dos alunos e para os ajudar a relacionar ideias (Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2011) e tira partido de uma boa preparação, uma vez que quando o professor não é capaz de antecipar respostas dos alunos e pensar como pode usar essas respostas para promover a sua aprendizagem, compromete a condução da discussão, porque revela falta de familiaridade com as ideias dos alunos e dificuldade em acompanhar essas ideias que contribuem para a discussão (Wagner et al., 2007).

A preparação do momento de discussão beneficia do apoio em materiais curriculares adequados, em particular, dos que incluem para além das ideias matemáticas importantes de cada unidade e de cada aula, indicações para a introdução da tarefa, de questões a colocar aos alunos e aspetos a observar no seu trabalho, de estratégias que eles podem usar, de possíveis conexões entre os tópicos matemáticos e exemplos de pensamentos dos alunos através, por exemplo, de diálogos que o professor pode fomentar com a turma sobre determinada ideia matemática. Contudo, é importante ter consciência que se os materiais não forem consultados na sua totalidade podem comprometer o trabalho a desenvolver em sala de aula (Grant, Kline, Crumbaugh, Kim, & Cengiz, 2009), porque podem desencadear uma abordagem diferente da inicialmente prevista, comprometendo a trajetória de aprendizagem delineada, em especial a compreensão de certos conceitos.

Stein e colegas (2008) apresentam um modelo que especifica cinco práticas – *antecipar*, *monitorizar*, *selecionar*, *sequenciar* e *estabelecer conexões entre as respostas dos alunos* – que os professores podem usar no sentido de tornar as discussões mais produtivas e que contempla as fases de preparação (práticas *antecipar* e *monitorizar*) e de dinamização da discussão (práticas *selecionar*, *sequenciar* e *estabelecer conexões*). Saliento, no entanto, que enquanto a prática *antecipar* é prévia ao desenrolar da aula, a prática *monitorizar* se enquadra no momento de trabalho autónomo dos alunos, contribuindo ambas para a condução da discussão. É importante frisar que nesse modelo cada prática tira partido das anteriores, ou seja, a monitorização do trabalho dos alunos durante a fase de exploração da tarefa beneficia da fase de antecipação do que os alunos podem fazer em determinada tarefa, e assim sucessivamente.

O uso deste modelo pedagógico com professores leva à introdução de uma nova prática, designada por prática zero, que consiste na definição do objetivo da aula (Smith & Stein, 2011). A este respeito, Chapin e colegas (2003) mencionam que definir o objetivo matemático da discussão é fundamental, na medida em que facilita pensar em estratégias, dificuldades, formas de representação, procedimentos a utilizar, raciocínios e questões a lançar para promover a discussão ou para ajudar os alunos a avançar nas suas ideias. Ou seja, a definição do objetivo da discussão contribui para a planificação da discussão – antecipar.

Na primeira prática, o professor antecipa eventuais resoluções dos alunos (corretas ou incorretas); pensa como vai levá-los a aprender o planeado (conceitos, representações, procedimentos); como vai dar resposta ao desenvolvimento do trabalho dos alunos; e que estratégias são mais pertinentes para o objetivo estabelecido, estando assim a contribuir para uma melhor orquestração da discussão. Quando o professor antecipa resoluções dos alunos e pensa sobre eventuais dificuldades, está a contribuir para a fase seguinte, já que vai dar um maior apoio ao trabalho do aluno. Todavia, é importante frisar que embora na preparação de uma aula se possa pensar num possível fio condutor para uma discussão, se possa antecipar resoluções e linhas de raciocínio, no momento da discussão o professor tem de ser capaz de considerar as ideias matemáticas mais produtivas assim como ampliar o pensamento dos alunos (Grant et al., 2009). É, também, fundamental que na condução da discussão em sala de aula o professor não fique preso à preparação que faz da discussão, pois nesse caso pode ignorar sugestões dos alunos para seguir a preparação feita previamente. A adoção desse tipo de práticas leva a que a discussão se centre em aspetos processuais e diminui a possibilidade de estabelecer conexões, uma vez que os contributos dos alunos podem conduzir a práticas de representação e de justificação (Larsson & Ryve, 2012).

Na segunda prática, o professor presta atenção ao trabalho dos alunos, em especial, à sua forma de resolução e ideias matemáticas envolvidas. Ao movimentar-se pela sala, o professor tem como objetivo identificar resoluções com potencial, quer em termos de estratégias utilizadas, quer em termos de representações usadas, com vista a serem partilhadas na discussão em grande grupo. Esta prática não envolve apenas ouvir ou observar o que os alunos estão a fazer, mas também ajudá-los a progredir no seu trabalho, colocando boas questões e identificando estratégias com potencial para promover uma discussão coletiva produtiva (Smith & Stein, 2011). As questões de focalização, pelo seu carácter formativo, desempenham, nesta fase, um papel importante ao focarem a atenção do aluno numa ideia específica ou num erro (Menezes et al., 2013), conciliadas com as questões de reflexão ao fomentarem o desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada das ideias em jogo, quando os alunos são levados a explicar ou justificar certos raciocínios, ou caminho seguido.

Durante o acompanhamento ao trabalho dos alunos, o professor pode ir tomando notas que o podem ajudar na fase seguinte, já que vai selecionar as resoluções que têm potencial para serem apresentadas em grande grupo. Esse trabalho permite ao professor organizar as resoluções apresentadas, evitando repetições e garantindo que são discutidas ideias matemáticas importantes.

A terceira prática consiste em determinar em que ideias e em que alunos a discussão vai incidir. Para tal, o professor pode optar por escolher as estratégias mais frequentes, as erradas ou até por introduzir estratégias com potencial mas que não foram apresentadas pelos alunos, tirando partido do trabalho de antecipação feito antes da aula. Uma boa antecipação da aula, apoia fortemente o processo de tomada de decisões. Apesar dos professores considerarem importante levar para a discussão soluções erradas, a maioria deles não o faz, porque acredita que pode confundir os alunos com mais dificuldades e expor os alunos que estão a pensar de forma errada (Bray, 2011).

Após a seleção, o professor vai sequenciar as resoluções dos alunos, de modo a atingir os objetivos que delineou para a aula e a maximizar a discussão, dando início a esse momento.

A última prática é a mais desafiante, já que pressupõe tornar a Matemática visível e compreensível para os alunos, focando o significado matemático e as conexões entre conceitos e representações, ou seja, é neste momento da aula que as ideias construídas durante o trabalho autónomo ganham o estatuto de conhecimento, enquanto construção social partilhada na comunidade de sala de aula (Simon, 1994). Para tal, os alunos são levados a explicar, ouvir e justificar as suas ideias e não somente a apresentar um conjunto de procedimentos relacionados com a sua resolução. Os alunos devem perceber que uma discussão não serve somente para mostrar as suas resoluções mas serve, essencialmente, para promover a compreensão e a aprendizagem da Matemática (Chapin et al., 2003). Só desta forma, os professores desenvolvem a capacidade dos alunos em participar em discussões (Kosko & Wilkins, 2015). As questões formuladas pelos professores e pelos alunos devem permitir provocar ou clarificar o pensamento dos alunos, já que este tipo de questões os leva a articular o seu pensamento. Nesta fase da discussão, as questões de reflexão são predominantes e determinantes, ao favorecer o acesso ao pensamento do aluno e o apoio à construção de novo conhecimento, já que estão relacionadas com os pedidos de explicação ou justificação (Menezes et al., 2013). De forma menos influente, podem também surgir as questões de focalização e as de verificação, quando é preciso apoiar os alunos na comunicação das suas ideias, estabelecer comparações entre estratégias e generalizar ideias, ou verificar se os alunos estão a compreender as ideias em análise (Menezes et al., 2013). É nesta fase da discussão que os professores tornam visível o objetivo da aula, como, por exemplo, formular verbalmente a generalização respeitante à multiplicação de uma fração por um número natural (Ponte & Quaresma, 2015).

De forma semelhante a Stein e colegas (2008), Selling e colegas (2015) também propõem um conjunto de práticas que podem apoiar o professor na dinamização da discussão coletiva e que compreende dois grandes momentos, um respeitante à planificação da discussão – ativar a discussão – e outro relativo à dinamização da discussão – liderar a discussão. No primeiro momento, o professor deve selecionar e resolver o problema, antecipar o pensamento dos alunos e monitorizar o trabalho dos alunos. No segundo momento, o professor é responsável por lançar a discussão, orquestrar a discussão e terminar a discussão. Para orquestrar a discussão, o professor deve elicitar respostas, orientar o pensamento dos alunos, solicitar e apresentar contributos.

Em linha com os autores anteriores, Chapin e colegas (2003) sugerem um ciclo que engloba três práticas: *i)* planificar e projetar, que consiste em preparar cuidadosamente a discussão, identificando as ideias matemáticas importantes, erros mais prováveis, dificuldades que os alunos possam sentir e como promover o envolvimento dos alunos na conversa; *ii)* improvisar e responder, que supõe que o professor esteja preparado para improvisar e responder no momento, dado que mesmo as aulas bem preparadas envolvem este risco, já que não se consegue prever como as coisas vão acontecer realmente; e *iii)* sintetizar e solidificar, que pressupõe que o professor promova momentos de síntese de ideias, recorde ideias ou o objetivo da aula. Relativamente à primeira prática, os autores defendem que é fundamental que o professor: *i)* identifique os objetivos matemáticos para aquela aula, ou seja, defina sobre que conteúdos deve recair a conversa; *ii)* antecipe confusão, isto é, que preveja aspetos que possam confundir os alunos ou onde eles possam errar, já que assim mais facilmente os pode auxiliar em contexto de sala de aula; *iii)* formule questões, ou seja, que pense em questões que levem os alunos a analisar, sintetizar e generalizar e não respostas de sim ou não; *iv)* simule a condução da conversa, isto é, que pense que ideias deve usar para promover a conversa; e *v)* planifique a implementação, ou seja, que articule todos os aspetos anteriores concretizando uma sequência de aula.

Todos os modelos anteriores assumem dois momentos fundamentais subjacentes a uma discussão: a planificação da discussão e a sua dinamização em sala de aula. Relativamente ao primeiro, destacam a importância da escolha da tarefa, da previsão de respostas dos alunos e como usar essas ideias para os envolver na discussão. Face a essa antecipação, os professores em sala de aula concretizam essas ideias, mas mostrando-se flexíveis para seguir outras ideias não antecipadas, face à impossibilidade de prever a atividade matemática dos alunos. Na dinamização da discussão, frisam a importância da justificação e da explicação dos raciocínios desenvolvidos, com vista à emergência de conhecimento matemático.

O sucesso destas discussões depende da capacidade do professor para as planificar e conduzir cuidadosamente. O professor pode dinamizar a discussão por três componentes distintas, com objetivos diferentes, mas em que cada uma contribui para as seguintes (Figura 1).

Apresentação de ideias → Comparação e avaliação → Filtragem

Figura 1: Componentes de uma discussão em grande grupo (Sherin, 2002a).

A primeira componente da discussão tem como propósito que os alunos partilhem as suas ideias e, para isso, o professor pode iniciar a discussão com estratégias incorretas, de modo a que o erro seja discutido com todos, ou com estratégias mais frequentes, de forma a serem acessíveis para a maior parte da turma, ou de fácil compreensão, para que todos sejam capazes de acompanhar os raciocínios envolvidos (Stein et al., 2008). No estudo de Ponte e colegas (2015, 2017), a professora inicia a discussão com uma resposta errada, pois identificou essa estratégia como potenciadora da aprendizagem dos alunos, promovendo, de seguida, a comparação entre as resoluções corretas e a incorreta. Os professores podem também optar por escolher as resoluções que envolvem pensamentos incompletos para iniciarem a discussão, dando, assim, oportunidade aos colegas de relacionarem essas ideias com as suas, explicarem e avaliarem os raciocínios em jogo (Alwarsh, 2018). Nesta perspetiva, os pensamentos incompletos são encarados como momentos de aprendizagem.

Apesar de grande parte das discussões ser dedicada à partilha de estratégias de resolução ou de ideias isso não é suficiente para ampliar o pensamento dos alunos (Cengiz et al., 2011). É necessário que nas discussões em grande grupo se criem "oportunidades para evidenciar conceitos, representações, procedimentos matemáticos e suas conexões e para promover o desenvolvimento de capacidades transversais como o raciocínio e a comunicação" (Ponte, Quaresma, & Branco, 2012, p. 84). Ou seja, é importante que os alunos, com o seu envolvimento em discussões, construam argumentos válidos, critiquem a razoabilidade das respostas e defendam as suas ideias, assim como aprendam a ouvir os colegas, formulem perguntas e apresentem contraexemplos (Clayton, 2014). Só este tipo de atitude favorece o desenvolvimento de uma melhor compreensão sobre o que está a ser apresentado. Para tal, é importante que durante a apresentação das diversas estratégias de resolução pelos alunos, os professores formulem questões como, *O que pensam?*, *Porquê?*. Este tipo de questões (questões de reflexão) vai permitir ao professor aceder a informação que não teria de outra forma, ou seja, vai favorecer o acesso ao pensamento e conhecimento do aluno (Menezes et al., 2013).

Na segunda componente da discussão, pretende-se que os alunos comparem ideias apresentadas, onde o professor começa a focar a atenção dos alunos no conteúdo da discussão, levando-os a confrontar resoluções próximas e distantes. E na última componente da discussão, o professor leva os alunos a pensarem sobre uma ideia específica que foi partilhada e/ou introduz novas ideias matemáticas que ajudem os alunos a progredir no assunto em estudo, ajudando-os a estabelecer relações entre as ideias apresentadas. Neste momento da discussão, o professor assume um maior controlo, já que pretende focar a atenção dos alunos no conteúdo em estudo. Após esta fase, voltam a gerar-se novas ideias e o ciclo continua (Sherin, 2000). Uma discussão em grande grupo pode envolver vários ciclos desse padrão discursivo (Figura 2). A componente da filtragem diz respeito tanto ao processo (os alunos têm oportunidade de partilhar o seu pensamento) como ao conteúdo (selecionar ideias matemáticas significativas) (Sherin, 2002a).

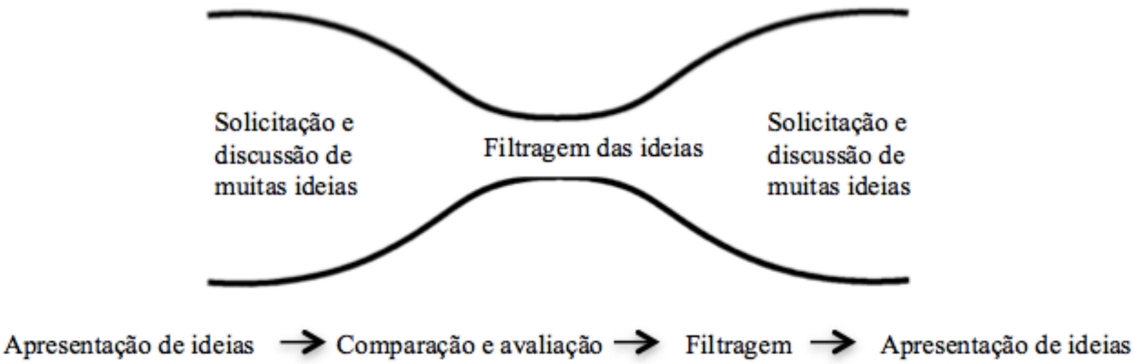


Figura 2: Representação do processo do discurso de sala de aula (Sherin, 2000, 2002a).

O modelo para promover uma discussão matematicamente produtiva segue um processo de estreitamento das ideias apresentadas pelos alunos, isto é, inicia com o professor a solicitar e discutir muitas ideias, de seguida a focar a atenção dos alunos apenas em algumas ideias e continua com o professor a incentivar a partilha de ideias, comparar e avaliar, e assim sucessivamente (Figura 3). Esse processo mostra que o professor na primeira fase da discussão não está muito preocupado com a direção do conteúdo, mas com a partilha de ideias, na fase seguinte, a ênfase muda e foca a atenção dos alunos em determinadas ideias, de modo a alcançar os objetivos definidos para a aula (Sherin, 2000).

Figura 3: Representação do espaço de conteúdo matemático (Sherin, 2002a).

O empreendimento de discussões matemáticas significativas em sala de aula depende do tipo de ações de ensino desempenhadas pelos professores, assim como de uma compreensão clara das solicitações feitas aos alunos (Clayton, 2014). Essas ações podem ser agrupadas em quatro tipos de classes principais, designadas de ações de discussão (*discussion actions*) (Rota & Leikin, 2002): classe das ações de estimular a iniciação (*stimulating iniciation*), que inclui ações que iniciam a discussão de uma nova ideia matemática; classe das ações de estimular a resposta (*stimulating reply*), que inclui as ações que estimulam a continuação da discussão e estão ligadas a afirmações anteriores; classe das ações de síntese das respostas (*summary reply*), que inclui as ações que terminam a discussão de uma questão particular; e classe das ações de ouvir e observar (*listening to and watching at*), que é uma ação complementar às outras três. Essas ações de discussão são apoiadas por um conjunto de sete possíveis ações de ensino, de natureza heurística: *i)* questionar (*questioning*), que inclui perguntas de iniciação, de clarificação e afirmações perante as quais os alunos são confrontados e convidados a encontrar a solução; *ii)* traduzir uma representação (*translating a representation*), que pressupõe usar uma representação simbólica ou gráfica para traduzir uma ideia; *iii)* construir uma cadeia lógica (*constructing a logical chain*), do tipo se...então; *iv)* repetir afirmações dos alunos (*repeating students' utterance*), com o objetivo de continuar a discussão, encorajar o raciocínio sobre alguma ideia partilhada, clarificar o que foi dito ou até verificar se as ideias foram compreendidas por todos; *v)* sugerir (*hinting*), que é usada quando é necessário ajudar os alunos a moverem-se entre raciocínios ou fazer conexões, por exemplo, pensa quando escrevemos isto; *vi)* afirmar um facto (*stating a fact*), que inclui afirmações matemáticas do professor ou factos matemáticos; e *vii)* dar *feedback* (*providing feedback*), que pressupõe refletir sobre as resoluções dos alunos. Esse modelo também pode ser usado em situação pós-aula para refletir sobre o momento de condução da discussão (Figura 4).

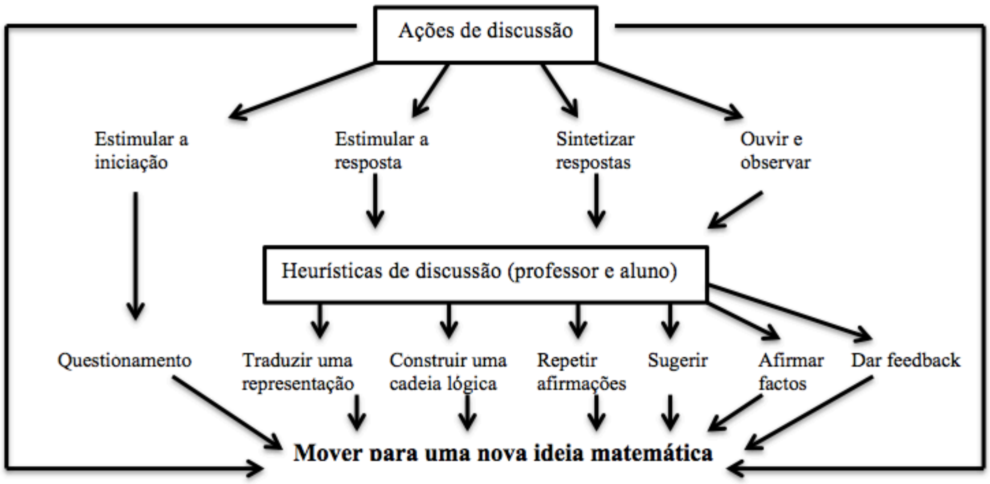


Figura 4: Ações de discussão (Rota & Leikin, 2002).

Em linha com estas ideias, Cengiz e colegas (2011) propõem a organização das ações do professor durante a dinamização da discussão em três tipos: *i)* ações de provocar (*eliciting actions*), que pressupõem convidar os alunos a partilhar as suas estratégias de resolução; *ii)* ações de apoiar (*supporting actions*), que permitem recordar aos alunos o objetivo da discussão, do problema ou da ideia; sugerir a interpretação de uma ideia, repetir o argumento, reforçar o pensamento do aluno; introduzir diferentes representações e contextos; e *iii)* ações de ampliar (*extending actions*), que levam os alunos a avaliar um argumento ou observação, a oferecer um raciocínio para um argumento, a comparar diferentes estratégias; a usar a mesma estratégia em novos problemas e a apresentar um contra argumento. As ações de provocar permitem aos alunos tornar públicas as suas ideias e resoluções e ao professor conhecer o pensamento dos alunos e usar essa informação para decidir que ideias têm potencial para serem discutidas. As ações de apoiar ajudam os alunos a recordar ideias já conhecidas e a considerar novas ideias, enquanto que as ações de ampliar têm como objetivo levar os alunos a progredir nas suas ideias. Com as ações de ampliar, o professor pode visar: *i)* encorajar a reflexão matemática (*encouraging mathematical reflection*), levando os alunos a compreender, a comparar e a generalizar ideias matemáticas; a considerar e a discutir relações entre ideias; a usar diversas resoluções e a considerar a razoabilidade de um argumento; *ii)* avançar nas suas ideias iniciais (*going beyond initial solution methods*), incentivando os alunos a procurar resoluções alternativas e a promover o uso de estratégias de resolução eficazes; e *iii)* promover o raciocínio matemático (*encouraging mathematical reasoning*), favorecendo a justificação das ideias e das estratégias dos alunos e o envolvimento com as justificações dos seus colegas (Cengiz et al., 2011).

Em linha com os dois modelos anteriores, Ponte e colegas (2013) defendem que o professor desempenha dois tipos de ações quando conduz discussões coletivas: umas relacionadas com os tópicos e aspetos matemáticos e outras relacionadas com a gestão da aprendizagem (Figura 5).

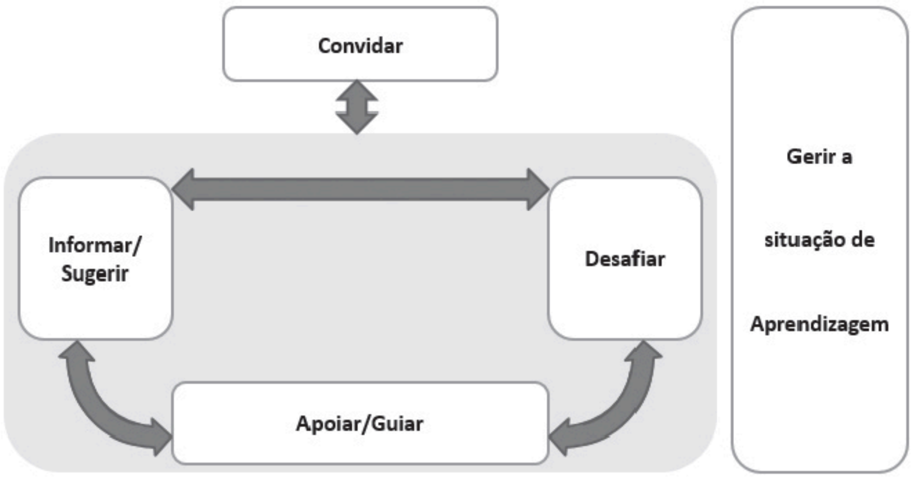


Figura 5: Ações do professor na condução de discussões (Ponte et al., 2013, p.59).

No que concerne às primeiras, os autores propõem quatro tipos de ações: *i)* ações de convidar, que têm como objetivo envolver os alunos na discussão; *ii)* ações de apoiar/guiar, que pretendem promover a continuação da participação dos alunos na resolução da tarefa que estão a realizar, ajudando-os a progredir no seu trabalho, através de perguntas ou outras intervenções, ou na discussão; *iii)* ações de informar/sugerir, que pressupõem introduzir informação, apresentar argumentos, validar as respostas dos alunos e *iv)* ações de desafiar, que intentam levar os alunos a produzir novas representações, interpretar ideias, formular conjeturas ou avaliar argumentos, isto é, os alunos são responsáveis por avançar no seu trabalho evoluindo nas suas ideias iniciais, quer seja em termos de representações, de interpretação de enunciados, de estabelecimento de conexões, de raciocinar, argumentar ou avaliar. É de destacar que há uma transferência de responsabilidade do professor para o aluno nas ações de desafiar, que não acontecia nas ações de sugerir, onde o professor era responsável pelo discurso matemático e por ajudar os alunos a avançar na resolução da tarefa proposta.

As ações de apoiar/guiar podem ser visíveis na exploração de desacordos, na interpretação da solução encontrada, na introdução de representações, na justificação das respostas e na negociação de significados (Ponte et al., 2017), bem como no redizer dos contributos dos alunos e no auxílio à apresentação da estratégia de resolução (Ponte & Quaresma, 2015).

O redizer assume um papel importante nas discussões, já que pode surgir segundo três perspetivas com objetivos diferentes: *i)* a linguística, onde o professor se limita a repetir o contributo do aluno, a expandir, adicionando novo conteúdo, a reformular e a recordar; *ii)* a discursiva, com a finalidade de esclarecer ou explicar com maior precisão e a de reorientar; e *iii)* a matemática, com o propósito de desenvolver conteúdo matemático durante a interação (Boukafri, Civil, & Planas, 2018). No estudo destes autores, o redizer favoreceu o uso de uma linguagem mais formal e precisa na construção de conceitos matemáticos, passando pelas explicações matemáticas, à semelhança do estudo de Ponte e Quaresma (2016), onde o redizer foi usado para corrigir linguagem matemática.

As ações de desafiar podem ser concretizadas no pedido de justificações aos alunos e no estabelecimento de conexões entre representações (Ponte & Quaresma, 2016). Em todas estas ações reconhecem-se aspetos fundamentais dos processos matemáticos como representar, interpretar (redizer afirmações e estabelecer conexões com outros conceitos), raciocinar (fazer inferências que culminam em novas conclusões, possível com o desenvolvimento de novas estratégias de resolução, formular conjeturas e generalizações e apresentar justificações) e avaliar (fazer julgamentos sobre aspetos relacionados com a resolução de tarefas, isto é, apreciar o valor de algum conceito, representação ou estratégia) (Ponte et al., 2017).

Todos os modelos teóricos apresentados assumem dois aspetos importantes no tipo de ações do professor na orquestração de discussões coletivas: as ações de abertura da discussão e as ações de continuação da discussão.

Bochicchio e seus colegas (2009) identificam cinco movimentos pedagógicos que durante as aulas de Matemática, apoiam, ampliam ou permitem construir o pensamento dos alunos, onde cada movimento influencia o seguinte. O primeiro movimento é a *valorização* (*valuing*), já que os alunos devem acreditar que os seus contributos são importantes. O segundo é a *divulgação* (*publicizing*), onde o professor apoia os alunos na partilha das suas ideias, de modo a que todos tenham oportunidade de compreender o que está a ser apresentado. No terceiro movimento da sequência – promover uma ampla *participação* (*broad-based participation*) – o professor envolve os alunos na partilha de ideias. O movimento *avaliação* (*assessing*) permite ao professor verificar se os alunos estão acompanhar o que está a ser apresentado e se a discussão está a evoluir num bom sentido. O último movimento – *movimentos matemáticos* (*mathematical moves*) – caracteriza-se pela criação de oportunidades onde os alunos se envolvem em práticas matemáticas, desenvolvendo a sua compreensão. Para o apoiar na concretização do último movimento, o professor pode recorrer a um conjunto de doze estratégias: construir significado através de representações (*building meaning across representations*) – estabelecem-se conexões entre diferentes representações, não apenas com o objetivo de as comparar; explorar soluções incorretas (*exploring incorrect solutions*) – permite redefinir o pensamento do aluno, levando-o a perceber por que determinada ideia não faz sentido; destacar (*highlighting*) – valorizar ideias; orientar (*moving the mathematics vertically or sequentially*) – colocar questões que permitam conduzir a discussão para as ideias seguintes; promover justificações (*promoting justification*) – permite aos alunos clarificar o seu pensamento, articulando ideias e verificando a validade dos argumentos matemáticos; promover outras perspetivas (*promoting others' perspectives*) – os alunos são incentivados a usar métodos de colegas ou a seguir outros caminhos; recapitular (*recapping, consolidating*) – o professor sintetiza as ideias principais dos alunos; procurar métodos ou abordagens alternativos (*seeking alternative methods or approaches*) – o professor incentiva os alunos a partilharem outras formas de resolução diferentes das apresentadas; solicitar esclarecimentos (*requesting clarification*) – o professor coloca questões à ideia apresentada, de modo a que fique clara para todos; comparar e contrastar (*comparing and contrasting*) – o professor pede aos alunos para compararem diferentes métodos, ideias, representações; procurar novas representações (*seeking new representations (for clarity)*) – o professor pede aos alunos para representarem as suas ideias de outras formas, com vista a uma maior compreensão das ideias em discussão; reorientar (*refocusing*) – o professor faz comentários ou questões para continuar a discussão na direção que pretende.

Em consonância com estas ideias, Cengiz (2013) menciona que os professores podem recorrer às seguintes ações para manter os alunos focados na discussão e promover a compreensão das ideias em jogo: *i)* usar o contexto dos problemas para colocar questões sobre a estratégia de resolução (*O que significa no contexto do problema?*); *ii)* incentivar os alunos a recorrer a diagramas e a desenhos para justificar o seu raciocínio; *iii)* promover desacordos, levando os alunos a pensar se existe mais de uma resposta correta; *iv)* levar os alunos a pensar sobre resoluções específicas e quais são mais eficientes. Já Chapin e colegas (2003) destacam as seguintes ações a que o professor pode recorrer para apoiar o pensamento dos alunos: *i)* redizer (*revoicing*) para tornar mais clara as ideias dos alunos, já que por vezes é difícil compreender os raciocínios que os alunos estão a tentar verbalizar, principalmente para os colegas, assim o professor recorrendo a esta ação repete a ideia do aluno de uma forma que seja compreensível, solicitando ao aluno que a verbalizou confirmação da sua interpretação; *ii)* solicitar um aluno para traduzir o raciocínio do colega (*asking student to restate someone else's reasoning*), com vista a envolver todos os alunos no acompanhamento das ideias que estão a ser partilhadas e ao aluno que está a verbalizar a sua ideia avaliar o que foi dito, uma vez que esta ação consiste em instar um aluno para repetir o que ouviu por palavras suas e requerer ao dono do raciocínio para analisar a interpretação feita; *iii)* incitar um aluno para articular o seu raciocínio com o do colega (*asking student to aply their own reasoning to someone else's reasoning*), através do pedido de justificações para acordo ou desacordo com determinada ideia, depois do professor garantir que ouviram e tiveram tempo para pensar no que foi dito, já que o seu objetivo é a apresentação de razões para a veracidade de certo raciocínio e não somente a manifestação de concordância; *iv)* incentivar uma maior participação (*prompting studentes for further participation*), através da solicitação de contributos, opiniões e comentários; *v)* valorizar o tempo de espera (*using wait time*), o professor aguarda os contributos dos alunos, não se precipitando para introduzir os seus. Contudo, é de salientar que nem todos os professores lidam bem com este tempo de espera e de silêncio por parte da turma, considerando que é uma perda de tempo. No entanto, os alunos para fazerem bons contributos precisam de tempo para organizar e comunicar as suas ideias.

As discussões em sala de aula, apesar de assentarem numa estrutura de participação, são baseadas na colaboração, já que implicam a produção conjunta de ideias, onde os alunos partilham pensamentos, ouvem e respondem às ideias dos outros e negoceiam significados (Staples, 2007). Numa discussão, ouvir é uma forma de participação fundamental, já que ao escutarem os alunos têm oportunidade de: *i)* aumentar o seu leque de estratégias, porque estão a pensar como a resolução apresentada se relaciona com a sua e com a situação, assim como os conceitos e procedimentos que mobiliza; *ii)* reduzir os riscos de partilha de uma ideia incorreta, uma vez que durante a apresentação de determinada estratégia são discutidas ideias erradas que permitem repensar as suas resoluções; *iii)* confirmar se a sua resposta está correta; *iv)* aprender mais facilmente; e *v)* não se sentirem em apuros (Hintz, 2011). Se estas ideias forem partilhadas com os alunos, eles podem tornar-se melhores ouvintes, sendo capazes de seguir e avaliar as ideias apresentadas, de se envolverem na resolução de divergências, de construírem significados partilhados (Wood, 1999) e participarem de uma forma mais produtiva nas discussões. Contudo, é importante ter consciência que o ouvir é uma dimensão do discurso de difícil acesso ao professor, mas que ocorre através da participação nas práticas da sala de aula, através da partilha de experiências.

No desenvolvimento de práticas matemáticas colaborativas é importante que o professor: *i)* incentive os alunos a darem contributos; *ii)* apoie os alunos a estabelecerem e a relacionarem ideias em ambiente colaborativo; e *iii)* oriente o desenvolvimento de ideias matemáticas (Staples, 2007). Para a concretização da primeira ação, o professor pode dar tempo para os alunos formularem e articularem pensamentos e valorizar os seus contributos, atribuindo pontos de participação; apoiar a produção de ideias dos alunos, recorrendo a diversas representações; e clarificar e ampliar raciocínios. Quanto à segunda, o professor pode criar contextos partilhados, estabelecendo conhecimentos prévios e proporcionando oportunidades de partilha de raciocínios; manter continuidade ao longo do tempo, organizando ideias e enfatizando o propósito; e coordenar o coletivo, posicionando estrategicamente os alunos para a partilha de ideias em grande grupo e organizando e controlando as interações. No que respeita à terceira componente, o professor pode orientar tarefas de alto nível de implementação, modificando as tarefas, ampliando o pensamento dos alunos, avaliando e diagnosticando continuamente; orientar a aprendizagem, enfatizando ideias fundamentais e estabelecendo conexões; e orientar através dos pensamentos dos alunos, ou seja, seguindo os seus contributos, o que exige flexibilidade da parte do professor. O processo de desenvolvimento de práticas colaborativas numa turma é um processo que estabelece uma relação cíclica entre a participação dos alunos, a negociação de significados e a interpretação dos alunos, já que a participação e o envolvimento na negociação de significados influencia as suas interpretações (Staples, 2007).

As discussões em Matemática estão, assim, estritamente relacionadas com a aprendizagem, já que ocorrem entre membros de uma turma e exigem a participação de todos, desempenhando papéis diferentes. O professor desempenha, por exemplo, o papel de dinamizador, fazendo perguntas, solicitando novas ideias, gerindo a discussão de forma produtiva, evitando validar precocemente as respostas dos alunos, e incentivando-os a ampliar as suas ideias (Simon & Schifter, 1991), levando-os a falarem mais sobre Matemática e a ouvirem mais as ideias dos colegas, promovendo a interação entre os alunos (Nathan & Knuth, 2003).

A participação do professor e dos alunos numa boa discussão pressupõe o desenvolvimento de determinadas ações que devem situar-se no nível três do quadro teórico apresentado por Huffer-Ackles e colegas (2004), que descreve trajetórias de ação do professor e do aluno organizadas em quatro níveis (do *nível zero* ao *nível três*) para quatro componentes – questionamento (*questioning*) (*A*), explicação do pensamento matemático (*explaining mathematical thinking*) (*B*), fonte de ideias matemáticas (*source of mathematical ideas*) (*C*) e responsabilidade pela aprendizagem (*responsibility for learning*) (*D*) – que ajuda os professores a ouvir os alunos e os alunos a escutarem-se uns aos outros (Quadro 1). Este quadro evidencia a transferência de papel e de responsabilidade do professor para o aluno enquanto membros de uma comunidade de discurso matemático, como também já era apontado por Ponte e colegas (2013) quando o professor recorria às ações de desafiar.

Estas comunidades de aprendizagem matemática promovem a comunicação matemática e ajudam os alunos a construírem uma melhor compreensão dos conceitos. Contudo, é importante que os alunos se envolvam ativamente na discussão, ou seja, passem de ouvintes inativos a ouvintes ativos, partilhem, justifiquem e assimilem ideias, interpretem e usem as ideias dos colegas para desenvolverem novas conjeturas, questionem contributos, esperem da discussão a emergência de raciocínios e de novas ideias matemáticas (McCrone, 2005), defendam as suas afirmações e modifiquem os seus argumentos sempre que não conseguem convencer a turma (Weber, Maher, Powell, & Lee, 2008) e façam comentários reflexivos (Ruthven et al., 2011).

Na condução de uma discussão e de forma a maximizar o seu potencial para a aprendizagem, o professor faz questões para promover o pensamento dos alunos, levando-os a pensar em situações semelhantes e não para se restringir a aspetos específicos de uma resolução (McCrone, 2005); junta contributos seus e sintetiza os argumentos da turma (Wagner et al., 2007). As suas intervenções vão no sentido de apoiar a articulação do pensamento matemático; relacionar com princípios, exemplos e procedimentos; usar uma representação preparada de antemão; promover; redizer; dinamizar a discussão; distanciar-se da autoridade; mostrar pouca regulação; e explicitar normas dialógicas (Ruthven et al., 2011).

Quadro 1

Trajetórias de ação do professor e do aluno (Hufferd-Ackles et al., 2004).

Níveis	**Componentes**	
0	**A**	O professor é o único a fazer perguntas limitando-se os alunos a responderem ao professor, dando respostas curtas
	B	As questões feitas aos alunos não têm como objetivo levá-los a explicar os raciocínios, podendo o professor dar as respostas
	C	O professor está normalmente no quadro a explicar os assuntos e os alunos cingem-se a responder ao apresentado pelo professor sem contribuírem com ideias novas
	D	O professor responde às perguntas dos alunos, repete respostas e mostra o processo correto e os alunos são meros ouvintes passivos
1	**A**	O professor continua a ser o único a questionar, mas já coloca questões focadas no pensamento dos alunos, enquanto os alunos respondem às questões e o resto da turma escuta passivamente ou espera pela sua vez
	B	O professor amplia uma ou outra ideia dos alunos e os alunos fornecem informação sobre o seu pensamento
	C	O professor continua a ser a fonte de ideias e os alunos contribuem com ideias para a discussão mas que não são exploradas
	D	O professor dá feedback e os alunos começam a envolver-se mais no que está a ser discutido
2	**A**	O professor começa a fazer perguntas mais abertas e os alunos começam a fazer perguntas uns aos outros

	B	O professor começa a explorar múltiplas estratégias e os alunos começam a explicar mais detalhadamente as suas ideias e a argumentar, defendendo as suas respostas
	C	O professor segue as explicações dos alunos e leva-os a comparar resoluções e os alunos mostram mais confiança na partilha das suas ideias
	D	O professor questiona a turma acerca da concordância ou não com determinada ideia partilhada e os alunos começam a ouvir-se uns aos outros apoiando as explicações dos colegas
3	**A**	O professor faz perguntas para apoiar o desenvolvimento do trabalho dos alunos e para guiar o seu discurso e os alunos também fazem perguntas e ouvem respostas
	B	O professor segue o pensamento dos alunos e faz questões para obter explicações mais completas e os alunos fornecem respostas cada vez mais completas, porque sabem que no fim os colegas fazem perguntas
	C	O professor permite que os alunos coloquem questões durante as explicações e os alunos apresentem e comparem ideias, porque sabem que as suas ideias são valorizadas
	D	O professor responsabiliza o aluno pela avaliação das ideias apresentadas e os alunos ouvem e esclarecem ideias para si e para toda a turma, envolvendo-se na discussão

Grande parte das discussões coletivas que se geram nas aulas de Matemática decorrem durante a fase de exploração da tarefa, ou na seguinte. Contudo, a *discussão equilíbrio* é uma forma particular de discussão matemática em grande grupo que ocorre alguns dias depois da aula em que a tarefa foi resolvida, de modo a garantir algum distanciamento por parte dos alunos acerca das suas ideias, já que tem como finalidade a socialização e a avaliação coletiva das estratégias usadas pelos alunos na resolução de um dado problema (Bussi, 1998). Contudo, este distanciamento dos alunos relativamente ao dia da resolução pode comprometer o sucesso da discussão, principalmente, em alunos mais novos que se esquecem facilmente do trabalho realizado e das ideias discutidas em pequeno grupo. Para tentar garantir alguma produtividade da discussão, o professor terá de dar tempo para os alunos voltarem a reunir em grupo e familiarizarem-se com o trabalho produzido. Esta forma de promover a discussão, pode causar alguma tensão nos professores que lutam diariamente com a preocupação do cumprimento dos programas.

A *discussão equilíbrio* segue, normalmente, uma estrutura em quatro atos. No primeiro ato – verdadeiro equilíbrio – os alunos são convidados a apresentar e a explicar as suas estratégias de resolução e só posteriormente os colegas são chamados a integrar o processo apresentando ideias e explicações. No segundo ato – processo – os alunos são solicitados a apresentar não só as suas estratégias de resolução finais, assim como as que abandonaram, destacando as suas dificuldades. No terceiro ato – nova aprendizagem – o professor introduz uma ideia nova na discussão que os alunos são chamados a interpretar, comparando as suas ideias iniciais com as resultantes da discussão. No último ato – institucionalização – as ideias partilhadas e aceites por todos são, nesse momento, institucionalizadas pelo professor e registadas pelos alunos. Essa institucionalização pode estar relacionada com "a definição de objetos matemáticos partilhados pela turma" (Bussi, 1998, p. 21). Nessas discussões, o professor não compara apenas resoluções, mas escolhe resoluções que recorram a estratégias ou representações diferentes e assegura-se que estratégias individuais são partilhadas por todos.

A condução de discussões matemáticas produtivas é influenciada por um conjunto de ações do professor que procuram garantir o envolvimento e participação de todos os alunos nesse momento de aula. Os alunos são incentivados a partilhar e a justificar as suas ideias, a comentar as dos colegas, a relacionar ideias e a participar no processo de negociação de significados.

Tensões, flexibilidade e padrões de interação

A promoção de discussões que apoiam o processo e o conteúdo do discurso matemático em sala de aula pode provocar tensões nos professores, já que estes são desafiados a encorajar os alunos a partilhar as suas ideias, usando-as como base para a discussão ao mesmo tempo que têm que garantir que a discussão é matematicamente produtiva (Bahr & Bahr, 2017; Chapin et al., 2003; Sherin, 2002a).

Os momentos de trabalho autónomo dos alunos, que sustentam grande parte das discussões, podem também gerar tensões nos professores, uma vez que estes têm que saber negociar as suas expectativas do ensino e do currículo com as descobertas dos alunos (Hammer, 1997). O professor tem, assim, a responsabilidade de incentivar os alunos a apresentar o seu trabalho, a comparar e avaliar as suas ideias; a filtrar contributos importantes focando aí a atenção dos alunos e assegurar o envolvimento de todos os alunos na discussão, mantendo a harmonia entre o discurso e o conteúdo.

A tensão surge, portanto, da tentativa de encontrar o equilíbrio entre um ambiente de sala de aula que incentiva as ideias dos alunos e cujo propósito é aprender conteúdos matemáticos específicos. Assim, monitorizar o conhecimento dos alunos durante o seu envolvimento na discussão pode originar nos professores tensões que decorrem das seguintes situações: *i)* quando o professor está a ouvir a ideia de um aluno e ao mesmo tempo tem que manter a turma ativa e acompanhar o que está a ser partilhado; *ii)* quando ideias erradas ou certas são dadas pelos alunos; *iii)* quando o ensino de procedimentos, a explicação de regras, a introdução de formas diferentes de encontrar respostas certas tem de ser conciliado com a resolução de ambivalências entre alunos; e *iv)* quando é necessário encontrar conteúdo que fomente a discussão ao mesmo tempo que ideias básicas não encorajam a discussão (Yerushalmy & Elikan, 2010).

Outras tensões muito frequentes, que são experienciadas pelos professores, na condução de uma discussão estão relacionadas com: *i)* os momentos de silêncio dos seus alunos; *ii)* a fraca participação dos alunos na discussão; e *iii)* a dificuldade dos alunos em saber ouvir. Estas dificuldades podem ser originadas por uma mudança de abordagem pedagógica na sala de aula, isto é, os alunos podem estar habituados a ouvir o professor e a responder somente às suas questões e não a participar neste tipo de interação que pressupõe a apresentação, justificação e argumentação sobre as ideias dos colegas (Chapin et al., 2003). É natural que quando o professor experimenta inovar na sua sala de aula enfrente dificuldades e obstáculos. Para os ultrapassar, o professor pode recorrer às seguintes ações para cada uma das tensões anteriormente apontadas: sugerir que os alunos conversem com o seu colega durante dois minutos para clarificar as suas ideias e ensaiar as suas respostas com o colega, de forma a não ter receio de falar perante a turma; mostrar vontade de ver mais alunos a querer participar na discussão, mencionando que para tal vai voltar a repetir a questão, por forma a dar mais tempo aos alunos que ainda não estavam prontos para participar; e solicitar alunos escolhidos para responder a um determinado contributo, para argumentarem sobre uma dada ideia, ou para acrescentarem contributos às intervenções feitas, por forma a envolver os alunos que não estão a participar na discussão ou estão a introduzir ideias que não dão continuidade aos raciocínios apresentados (Chapin et al., 2003). As tensões que os professores enfrentam na dinamização da discussão estão estritamente relacionadas com as práticas de discussão, ou seja, com o processo (interações) e com o conteúdo do discurso (conteúdos matemáticos).

Para analisar estas tensões, Speer e Wagner (2009) sugerem, em linha com o anteriormente exposto, o recurso ao uso do *scaffolding* social e analítico. O primeiro diz respeito ao uso que o professor faz para apoiar normas de discurso e de participação dos alunos e o segundo ao apoio dado para fazer avançar a discussão em direção aos objetivos matemáticos, selecionando criteriosamente os contributos dos alunos. O sucesso do *scaffolding* analítico depende do reconhecimento da parte do professor: *i)* dos raciocínios dos alunos (corretos ou não); e *ii)* das ideias que contribuem para atingir os objetivos e para o desenvolvimento da compreensão matemática, usando-as de uma forma produtiva. Quando os professores se afastam do *scaffolding* analítico para promover uma maior participação dos alunos, valorizando o *scaffolding* social, as discussões evidenciam falta de rigor na argumentação (Nathan & Knuth, 2003).

O uso, por parte do professor, do *scaffolding social* é semelhante ao movimento de manter (*mantain*), proposto por Brodie (2010), na medida em que apoia o processo de articulação de ideias. Isto é, a autora destaca que quando o professor repete uma intervenção de um aluno, este é considerado de manter, quando a ideia partilhada permanece em público para outras considerações, solicitando outros comentários. Caso contrário, a repetição pode assumir outras vertentes, nomeadamente: *i)* inserir (*insert*), quando o professor junta contributos à participação dos alunos, sugerindo algo, formulando uma questão ou corrigindo; *ii)* descobrir (*elicit*), quando adiciona informação para fazer avançar a aula para o desenvolvimento de uma melhor compreensão do que está a ser analisado; *iii)* pressionar (*press*), quando leva os alunos a explicar melhor, justificar, tornar as ideias mais claras (*Podes dizer mais?*, *O que queres dizer?*, *Por que escolheste esse?*); e *iv)* confirmar (*confirm*), quando atesta que ouviu corretamente.

Perante as exigências do ensino exploratório, os professores precisam de ser flexíveis na sua atuação em sala de aula para mais facilmente vencerem essas tensões. A necessidade de adaptação dos planos de aula face às intervenções dos alunos está implícita nos modelos apresentados por Stein e colegas (2008) e Chapin e colegas (2003) e pode ser analisada tendo em conta os quatro padrões de flexibilidade (*patterns of flexibility*) introduzidos por Leikin e Dinur (2007), sendo os três primeiros de natureza matemática e o último de natureza pedagógica: *i)* resultados diferentes (*different outcomes*), a ideia de um aluno faz mudar o plano inicialmente previsto pelo professor; *ii)* estratégias diferentes (*different strategies*), são introduzidas justificações e ideias novas, mas semelhantes às previstas pelo professor; *iii)* sequenciação diferente (*different sequencing*), os alunos estabelecem relações entre propriedades diferentes das inicialmente previstas pelo professor; e *iv)* objetivos diferentes (*different scopes*), os alunos introduzem ideias que o professor considera difíceis para a turma. Esses autores mencionam, ainda, que a flexibilidade do professor é influenciada por três fatores que estão relacionados com o seu conhecimento matemático: *diversidade* (o professor atua de forma flexível se considera que determinada ideia pode levar os alunos a ampliar o seu pensamento e de forma inflexível se entende que essa ideia pode confundir os alunos), *reciprocidade* (o professor aprende com os alunos na discussão, em consequência da partilha de diferentes estratégias) e *intencionalidade* (depende do professor levar ou não para a discussão determinadas ideias). Contudo, para analisar a flexibilidade do professor é necessário ter em conta os padrões de interação que se geram na aula. Os padrões de interação são assumidos como regularidades construídas interativamente e não como regras estipuladas por alguém (Voigt, 1994). É notória a necessidade de flexibilidade de adaptação dos professores face ao planificado para a discussão, no entanto, uma boa planificação da discussão também pode transmitir mais confiança ao professor para essa flexibilidade de adaptação, já que pensou em várias possibilidades de resposta e como poderá levar os alunos a construir conhecimento matemático perante essas resoluções.

Em sala de aula, podem identificar-se vários tipos de padrões de interação consoante a forma como o professor e os alunos interagem, contemplando a forma (saber como comunicar) e o conteúdo (saber o que comunicar) (Wood, 1998). O padrão de interação funil (*funnel pattern*) (Wood, 1994) é caracterizado pelo professor não dizer ao aluno o que está errado mas guiá-lo até à resposta correta, através do questionamento e construindo uma cadeia de raciocínios que o faça chegar ao pretendido. Neste caso, o papel do aluno é responder às questões do professor, sendo todo o raciocínio elaborado pelo professor. O aluno para além de identificar o erro é ajudado a encontrar possíveis formas de pensar. Contudo, este padrão não se afasta muito do discurso unívoco, tratando-se de uma aprendizagem ilusória, já que o aluno apenas tem que responder acertadamente às questões do professor (Wood, 1998).

O padrão de interação focalização (*focusing pattern*) (Wood, 1994) é caracterizado pelo professor criar oportunidades que levem o aluno a pensar sobre o aspeto principal da questão. A responsabilidade de resolver a situação é do aluno e não do professor, como no caso do padrão anterior, onde o professor controla toda a interação. Contudo, estes dois padrões servem a intenção do professor de criar situações de aprendizagem nas quais os alunos construam significados matemáticos. No entanto, no primeiro padrão o professor guia a participação do aluno através do processo, ou seja, tem a intenção de levar os alunos a aprender guiando-os no seu raciocínio, enquanto no segundo o professor sintetiza ou foca a atenção do aluno em aspetos importantes, deixando-o depois resolver a situação, ou seja, pretende que os alunos pensem sobre a Matemática e discutam as suas ideias com os colegas (Wood, 1998).

No padrão de interação provocar (*elicitation pattern*) (Voigt, 1994) podem distinguir-se três fases: na primeira, o professor apresenta uma tarefa ambígua e os alunos apresentam soluções distintas que o professor avalia preliminarmente; na segunda, o professor orienta os alunos para uma determinada ideia, podendo apoiá-los através de questões, quando os contributos dos alunos são muito diferentes; e por fim, o professor em conjunto com os alunos reflete e avalia as ideias em jogo. Este padrão resulta da valorização das ideias presentes na resolução dos alunos, principalmente quando são diferentes ou incompreensíveis para a turma (Guerreiro et al., 2013).

O padrão de interação discussão (*discussion pattern*) (Voigt, 1995) é caracterizado por o professor propor uma tarefa para os alunos resolverem colaborativamente durante um certo período de tempo, de seguida, solicitar a um aluno para apresentar e explicar a sua estratégia de resolução, colocando questões que permitam clarificar raciocínios, repetindo este ciclo com a introdução de mais resoluções para análise até à emergência de um conhecimento matemático partilhado por todos. O padrão de discussão revela-se na ajuda que o professor dá ao aluno para explicar e tornar públicos os seus raciocínios e estratégias de resolução (Guerreiro et al., 2013). Para estes autores, compreender os erros dos alunos e valorizar as interações entre eles são instrumentais nos padrões de interação discussão e provocar, baseados no reconhecimento do pensamento dos alunos como parte integrante da sua aprendizagem.

O padrão de interação matematização direta (*direct mathematization pattern*) (Voigt, 1994) é um padrão temático, que pressupõe o desenvolvimento de um tema matemático, recorrendo a símbolos e linguagem matemáticos. Assim sendo, este padrão é específico das aulas de Matemática.

O modelo de interação mais conhecido em sala de aula segue a estrutura I-R-E ou I-R-F (Pirie, 1998; Ruthven et al., 2011), que é iniciado, habitualmente, pelo professor com a introdução de uma questão que permite recordar a situação em exploração ou convidar os alunos a apresentarem as suas resoluções – movimento de iniciação (*initiation*) – que origina uma resposta por parte do aluno – movimento de resposta (*response*) – e que pressupõe da parte do professor uma reação à sua resposta – movimento de avaliação (*evaluation*) (E) ou de continuação (*follow-up*) (F). A análise das interações do discurso mostra que os alunos quando confrontados com situações novas revelam dificuldade em colocar as suas ideias à disposição dos outros (Kieran, 2001). Nas aulas de ensino de natureza exploratória pretende-se que o terceiro movimento seja de seguimento, ou seja, que se inicie um novo ciclo a partir da escolha criteriosa de uma resposta que vai permitir suscitar e alargar as ideias dos alunos, justificando as suas respostas, ou de reflexão e argumentação. Encarado nessa vertente, o padrão de interação I-R-E é compatível com o discurso dialógico. O movimento de resposta tem a ganhar quando o professor não nomeia, à partida, um aluno para responder, já que permite a apresentação de diversas ideias por diferentes alunos.

Focada no terceiro movimento, Chamberlin (2005) organiza as interações que ocorrem durante as discussões que pretendem interpretar o pensamento dos alunos em quatro categorias: *i)* o padrão de interação contribuição-cadeia (*contribution-chain interaction pattern*) que consiste na partilha de uma ideia inicial, originada pela natureza colaborativa das discussões, seguida de uma série de contributos (por exemplo, comentários novos ou interpretações diferentes) e de um final, quando, aparentemente, os alunos interpretaram todas os contributos; *ii)* o padrão de interação procura de terminologia (*terminology-search interaction pattern*) que é caracterizado pela partilha de uma ideia para resolver uma tarefa e pela proposta de terminologia para expressar as ideias; *iii)* o padrão de interação questão iniciada (*question-initiated interaction pattern*) que consiste na formulação de uma questão seguida de uma série de respostas e alguns comentários adicionais que continuam a discussão; e *iv)* o padrão de interação desafio (*challenge interaction pattern*) que surge com a proposta de um desafio ou explicação para o desafio seguido de uma contraexplicação ou de um acordo. Apesar de todos os padrões de interação ajudarem os professores a interpretar o pensamento dos alunos, quando estes encontram uma justificação para os seus pensamentos estão envolvidos, na maioria das vezes, num padrão de contribuição-cadeia. Ainda nesse padrão, a autora sublinha a importância de evitar perguntas ou comentários que direcionem os alunos para determinadas soluções. As salas de aula que privilegiam o discurso dialógico favorecem a aprendizagem da Matemática com compreensão, já que os alunos desenvolvem a sua capacidade de justificação, argumentação e reflexão. Esta interação entre professor e alunos proporciona a discussão de importantes ideias matemáticas. A promoção desse tipo de aulas é da responsabilidade do professor.

Síntese

As discussões matemáticas que ocorrem nas aulas de ensino de natureza exploratória favorecem a aprendizagem da Matemática, porque permitem aos alunos apresentar o resultado do seu trabalho autónomo, as suas conjeturas, justificações, conclusões e questionar os colegas durante esses momentos de partilha em ambiente colaborativo. O conhecimento é, assim, construído como uma interação social, numa comunidade onde se estabelecem normas e padrões de discurso, onde professor e alunos clarificam ideias, avaliam argumentos e estabelecem conexões entre ideias partilhadas e conhecimentos prévios.

O professor desempenha um papel determinante na condução dessas discussões, gerindo intervenções, orientando os alunos de modo a atingir os seus objetivos e envolvendo os alunos no processo de negociação de significados e sistematização de ideias matemáticas importantes. Para tal, o professor recorre a diversas ações de ensino, como às ações de convidar, apoiar, informar e desafiar, com vista a levar os alunos a apresentarem e discutirem as suas estratégias de resolução. Assim, o professor conduz o discurso da aula por três grandes momentos: o primeiro, em que os alunos são chamados a apresentarem as suas estratégias de resolução, de seguida, são desafiados a compararem as suas resoluções com as que estão em análise, de modo a introduzirem ideias novas na discussão que são posteriormente filtradas pelo professor, para levar os alunos a aprofundarem certos argumentos, justificações ou contributos, visando o desenvolvimento de uma melhor compreensão das ideias em jogo.

Promover discussões matemáticas produtivas é uma tarefa exigente e complexa que provoca tensões nos professores, já que estes são responsáveis pelo envolvimento de todos os alunos no processo de partilha de ideias matemáticas, ao mesmo tempo que têm que garantir que as ideias que estão a ser discutidas são importantes e contribuem para a construção de novo conhecimento nos alunos. O desafio dos professores é, assim, manter o equilíbrio entre esses dois aspetos (apresentação e discussão de ideias e construção de conhecimento), o que exige flexibilidade na sua atuação, nomeadamente, na planificação para essa aula, apoiando-se em normas de discurso dialógico. Uma boa planificação da discussão, para além de favorecer a produtividade nas discussões dinamizadas em sala de aula, pode, também, ajudar os professores a lidar melhor com as tensões que enfrentam nas suas práticas de orquestrar discussões. Ou seja, os professores ao pensarem sobre possíveis resoluções dos alunos, dificuldades que podem enfrentar, erros que podem cometer e como os podem ajudar a superar essas adversidades; bem como usar essas ideias para envolver os alunos em discussão e construir conhecimento matemático, podem ser mais flexíveis na sua atuação, ajustando mais eficazmente a sua planificação à atividade matemática dos alunos e aos imprevistos ocorridos em sala de aula.

CAPÍTULO III

Práticas e conhecimento profissional

Este capítulo encontra-se organizado em duas secções. Na primeira, analiso o conceito de prática, salientando alguns elementos estruturantes das práticas letivas: tarefas, materiais didáticos, modo de trabalho dos alunos, tipo de discurso, discussão coletiva e avaliação. O foco no estudo das práticas letivas tem como objetivo contribuir para uma melhor compreensão da relação entre ensino e aprendizagem.

Na segunda secção, discuto o conhecimento necessário para o exercício da função de ensinar, em particular o conhecimento do professor de Matemática, já que esse conhecimento desempenha um papel muito importante no ensino e aprendizagem dessa disciplina. Depois de apresentar diversos modelos que favorecem a explicitação dos diversos aspetos que integram o conhecimento do professor e que esse mobiliza na sua prática docente, termino sublinhando que o conhecimento do professor necessário para o ensino deve ser encarado numa perspetiva integradora.

Neste trabalho, assumo que o professor de Matemática no exercício da sua função mobiliza diversas vertentes do conhecimento, nomeadamente, o conhecimento de Matemática, do currículo, dos alunos e da aprendizagem e da prática letiva, que, em particular, inclui as tarefas que seleciona e como as explora em sala de aula, a comunicação e discussão que promove, e como dinamiza e envolve os alunos no processo de negociação e sistematização de ideias matemáticas.

Práticas profissionais

O estudo das práticas dos professores tem merecido uma atenção especial por parte dos investigadores, já que influenciam a qualidade do ensino e aprendizagem que se proporciona aos alunos. Essas práticas decorrem enquadradas em modelos de ensino e são apoiadas nas crenças e conhecimento do professor.

As práticas podem ser encaradas como atividades recorrentes e normas nas quais se envolvem professores e alunos e que se desenvolvem ao longo do tempo (Boaler, 2003), enquadradas na sua forma de trabalho e de acordo com as suas intenções e significados (Ponte & Chapman, 2006). Nessa perspetiva, as práticas focam-se no processo de ensino do professor, em particular, nas ações e tomadas de decisão que são suportadas pelo seu conhecimento e crenças. Essa visão das práticas assenta na abordagem cognitivista, que se distingue da sociocultural, na qual o conceito de prática se apoia na teoria da atividade, caracterizada por um objeto e um motivo, sendo a realização de uma determinada tarefa o *objeto* da atividade e o conjunto de razões que conduzem o participante à sua realização, o *motivo* (Ponte et al., 2012). Esse conjunto de ações que o professor empreende para atingir os seus objetivos é o que Schoenfeld (2000) designa de *sequências de ação*, as quais tiram partido dos *planos de ação* elaborados pelo professor e que são pensados tendo em conta um objetivo. Os planos de ação dizem respeito à planificação, na medida em que são entendidos como mecanismos prospetivos que permitem atingir os objetivos definidos. Cada plano de ação dá origem a uma *sequência de ação*, que é influenciada pelas crenças e conhecimento do professor (Schoenfeld, 2000).

As crenças, atitudes, conceções e identidade profissional, designados por fundamentos, desempenham um papel marcante na prática do professor, quando relacionados com o seu conhecimento base e conhecimento na ação, como discutido por Oliveira e Ponte (1997), que sublinham a importância da integração desses dois conhecimentos. O conhecimento base refere-se ao *saber que*, isto é, ao conjunto de saberes que o professor possui sobre Matemática e ensino e aprendizagem dessa disciplina, enquanto o conhecimento na ação está relacionado com o *saber fazer*, ou seja, com os saberes específicos que o professor revela na sua atuação em sala de aula.

Na atividade docente pode falar-se em práticas letivas, também entendidas como profissionais, em práticas profissionais na instituição e em práticas de formação (Ponte & Serrazina, 2004).

Nas práticas letivas, as tarefas (que podem ser de natureza diversificada e conduzir a diferentes modos de trabalho), os materiais didáticos, a avaliação (que pode ser de diferentes tipos) e o discurso desempenham um papel nuclear no trabalho dos professores em sala de aula e, consequentemente, um papel relevante na aprendizagem dos alunos.

As tarefas podem ser de diversos tipos, de acordo com as oportunidades que dão aos alunos (Ponte & Serrazina, 2000; Stein & Smith, 1998). De facto, podem favorecer o envolvimento dos alunos na procura de conceitos, estratégias, representações e também o uso e desenvolvimento do pensamento matemático (Watson et al., 2013), assim como treino de procedimentos aprendidos. O trabalho dos alunos nas diversas tarefas pode ser apoiado nos materiais didáticos, já que estes têm a particularidade de permitirem que os alunos manipulem e encontrem representação e ilustração para os conceitos em estudo (Ponte & Serrazina, 2000).

À semelhança das tarefas, o tipo de questões que o professor coloca também pode ser diverso e com oportunidades de aprendizagem diferentes para os alunos (Brodie, 2010; Menezes et al., 2013; Ponte & Serrazina, 2000). O questionamento, tanto por parte do professor como dos alunos, é um dos elementos fundamentais do discurso da aula, dado que vai permitir aceder a informação que seria difícil de obter de outra forma.

A avaliação assume, essencialmente, as vertentes formativa e sumativa. A primeira tem como objetivo contribuir para a melhoria do processo de aprendizagem do aluno e a segunda para a avaliação do aluno, traduzindo-se, normalmente, em dados quantitativos. Nas suas práticas de avaliação, o professor pode recorrer ao questionamento oral, à observação do trabalho do aluno em sala de aula, aos testes, entre outros elementos, tirando, assim, partido dos elementos anteriormente discutidos.

Quanto às práticas profissionais na instituição, os professores veem muitas vezes o seu tempo a ser ocupado por informações e questões administrativas (Ponte & Serrazina, 2004), sendo o sobrante dedicado à elaboração de planificações e de critérios de avaliação. Neste domínio das práticas, é menos frequente encontrar professores a trabalharem em conjunto para preparação e discussão de documentos a utilizar nas práticas letivas como, por exemplo, fichas de trabalho, tarefas, testes, e quando isso acontece é, geralmente, em encontros informais. Relativamente às práticas de formação, muitas vezes os professores frequentam ações de formação de curta duração, onde nem sempre é visível a relação entre a teoria e a sua prática (Ponte & Serrazina, 2004).

Os três tipos de práticas apresentadas influenciam-se mutuamente. De facto, as práticas letivas podem ser valorizadas pelas práticas de formação e profissionais na instituição em que os professores se envolvem, assim como estas últimas são enriquecidas pelas práticas letivas de cada um. As práticas profissionais na instituição introduzem um elemento essencial, apesar de ainda não estar muito enraizado nessas práticas, a colaboração. Essa colaboração pode também emergir das práticas de formação em que os professores se envolvem, desde que se assumam como um contributo importante à sua prática letiva, que, consequentemente, poderá ter repercussões favoráveis nas práticas profissionais na instituição.

Focando as práticas profissionais, Boaler (2003) assevera que as principais atividades que ocorrem na sala de aula são: a discussão em grande grupo; o discurso unívoco; o questionamento por parte do professor; o trabalho individual dos alunos e respetiva partilha com a turma; e a avaliação. No ensino tradicional o discurso unívoco é dominante, enquanto no ensino de natureza exploratória é privilegiado o discurso dialógico e a discussão em grande e em pequenos grupos. A exposição por parte do professor e a resolução de exercícios também perdem espaço na transição do ensino tradicional para o exploratório, dando lugar a um maior questionamento e à resolução de problemas (Menezes et al., 2013; Menezes, Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2014). No ensino de natureza exploratória, a negociação de significados é, também, um elemento essencial das práticas de sala de aula, já que pressupõe tornar visível significados no processo de interação entre alunos e alunos e professor (Menezes et al., 2014). Ainda nesse quadro de ensino, onde se privilegiam as interações entre os alunos, o questionamento, a apresentação de respostas durante as discussões em grande grupo e o uso de representações diversificadas para explicitar e sintetizar ideias, Selden e Selden (2012) referem que a criação de ambientes instrucionais, onde se envolvem os alunos a trabalhar produtivamente em Matemática é um elemento fundamental das práticas de ensino. Brodie (2010) relata exemplos das suas aulas onde desempenha o papel de facilitador e onde as práticas questionar e de ouvir deram origem a uma série de movimentos que lhe permite conhecer o pensamento dos alunos e apoiá-los no desenvolvimento do raciocínio matemático. Ouvir não é prestar atenção ao que os alunos estão a dizer mas é interpretar o que está a ser dito no contexto em que se diz (Menezes et al., 2014). Essa ação discursiva pode cumprir diferentes propósitos, já que o professor pode ouvir para avaliar o conhecimento do aluno – ouvir avaliativo; para compreender as ideias dos alunos – ouvir interpretativo; ou para envolver os alunos em discussões matemáticas produtivas – ouvir hermenêutico (Menezes et al., 2014). No caso do ouvir interpretativo é usual o professor pedir justificações ao aluno.

A estas duas práticas, Menezes e colegas (2014) acrescentam as práticas explicar e responder. São variadíssimas as situações numa aula onde o professor tem que explicar, como, por exemplo, explicar conceitos, procedimentos, ideias apresentadas por alunos e não compreendidas pelos colegas. O responder numa aula pode ocorrer em distintas circunstâncias, como, por exemplo, responder a uma questão colocada por um aluno ou a uma intervenção. O tipo de resposta dada pelo professor pode depender do tipo de questão colocada. Conjugando as quatro práticas apresentadas, podem estabelecer-se as seguintes relações: o ouvir ocorre em simultâneo com a intervenção do aluno; o responder surge após a participação do aluno; e o perguntar e o explicar pode ocorrer antes e/ou depois da intervenção do aluno. No questionamento, as questões de verificação estão, normalmente, associadas ao ouvir avaliativo, enquanto as questões de focalização surgem ligadas ao ouvir interpretativo. As questões de inquirição relacionam-se com o ouvir globalizante (Menezes et al., 2014).

Para o estudo das práticas profissionais, Ponte e colegas (2012) consideram importante focar os seguintes aspetos: *i)* os motivos do professor e as diversas ações que esses desencadeiam; *ii)* o contexto social e o contexto educativo, que interfere na interpretação e implementação das orientações curriculares; *iii)* o contexto da turma, que está relacionado com o interesse e o envolvimento dos alunos no trabalho de sala de aula; *iv)* o conhecimento profissional do professor nas suas distintas vertentes; *v)* o saber-fazer do professor, que se revela nas ações que concretizam a sua prática; e *vi)* a capacidade reflexiva do professor, fundamental para o desenvolvimento profissional. Atendendo a essas ideias, o professor desenvolve a sua prática de acordo com as suas crenças, motivações e conhecimento, enquadradas num determinado contexto social e curricular. Essas práticas revelam-se na qualidade do ensino e aprendizagem dos seus alunos. De facto, a aprendizagem dos alunos é influenciada pelo tipo de ensino praticado pelo professor, ou seja, pelas tarefas que propõe e modo como as explora em sala de aula, pelo modo de trabalho dos alunos nessas tarefas, pelos materiais que disponibiliza, pelo tipo de discurso que promove, pela forma como conduz uma discussão e envolve os alunos no processo de negociação de significados e como gere o processo de avaliação.

No quadro do ensino exploratório, privilegia-se o trabalho autónomo dos alunos com tarefas matematicamente significativas, o envolvimento dos alunos na apresentação, discussão e sistematização de ideias, que permitam evidenciar conceitos, representações, procedimentos, conexões, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio, da comunicação e da resolução de problemas. Nessas aulas, o discurso em que professor e alunos se envolvem é diversificado e cumpre distintos objetivos. O professor explica para ajudar os alunos a progredir no seu trabalho; questiona para promover a reflexão, a justificação e a argumentação; ouve para interpretar as ideias dos alunos e para os implicar em discussões produtivas e responde para clarificar e sintetizar ideias.

É importante continuar a estudar as práticas do professor, explorando a vertente da colaboração permanente, já que essa pode trazer benefícios ao desenvolvimento da atividade do professor e contribuir para melhor se compreender as relações entre ensino e aprendizagem.

De seguida, discuto o conhecimento que o professor de Matemática necessita para exercer a sua atividade, analisando a sua natureza e relação com a prática. Apresento as diversas vertentes que compõem o conhecimento profissional do professor de Matemática e conexões entre elas.

Conhecimento do professor de Matemática

O ensino da Matemática na sua vertente exploratória pressupõe que os alunos trabalhem com tarefas matematicamente significativas, apresentem e discutam o produto do seu trabalho autónomo, justificando as suas ideias e argumentando sobre as dos colegas, com vista ao desenvolvimento do raciocínio, da compreensão e da reflexão matemáticos. Na promoção desse tipo de ensino, o professor desempenha um papel muito importante, que é apoiado no seu conhecimento (Hill, Rowan, &Ball, 2005; Schoenfeld, 2000; Shulman, 1986).

Hessen (2000), no seu livro *Teoria do conhecimento*, discute aprofundadamente o conceito de conhecimento enquadrado em diferentes correntes. Focado no racionalismo e no empirismo, apresenta o conhecimento como uma relação entre sujeito e objeto, onde a função do sujeito é aprender e a do objeto é ser aprendido pelo sujeito. Ou seja, o objeto é o determinante e o sujeito o determinado. Assim, o conhecimento é uma determinação do sujeito pelo objeto. Essa visão do conhecimento dá um grande destaque à experiência e à razão, sendo esses dois aspetos os constituintes do conhecimento.

Na mesma *interface* entre pensamento e experiência, Santos (2000) encara o conhecimento como um corpo de saberes, aos quais se têm acesso através de diversas fontes, como, por exemplo, livros e revistas, mas também como algo dinâmico que existe na ação. É nessa ligação entre teoria e prática que emergem as questões do conhecimento profissional do professor, em particular do professor de Matemática.

O conhecimento profissional é um processo social de habilitação de professores pela posse de um determinado saber distintivo, ativado pelo reconhecimento de uma formação específica para o exercício da função de ensinar (Roldão, 2007). Essa visão salienta a forte ligação entre a natureza da função que se pretende exercer e o tipo de conhecimento específico para esse exercício. Esse tipo de conhecimento implica a conexão entre diversos tipos de saber, como o científico, o científico-didático e o pedagógico que se conjugam num saber integrador, que procura responder ao *como ensinar aqui e agora*. Para Roldão (2007), esse saber integrador pressupõe transformação, por exemplo, os saberes científico-didáticos incluem os saberes científicos, admitindo a sua modificação. Para a autora, o conhecimento profissional pressupõe, assim, uma incorporação mútua, coerente e transformadora de vários domínios do conhecimento.

Ponte (2012) afirma que o conhecimento profissional do professor de Matemática está orientado para a atividade prática, já que tem como objetivo ensinar Matemática a um grupo de alunos, apesar de se apoiar em conhecimentos teóricos (sobre a Matemática e seu ensino), sociais e experienciais (sobre os alunos, o contexto social e escolar dos alunos e sobre a dinâmica da aula).

Enfatizando a conexão teoria-prática, Speer, King e Howell (2015) apresentam o conhecimento profissional docente como um dos diversos fatores que influenciam as decisões dos professores e as suas ações, na forma como concretizam os seus objetivos de ensino. Essa visão do conhecimento profissional está em sintonia com a noção de conhecimento na ação de Schön (1983), já que, para este autor, se refere ao conhecimento que os profissionais revelam no desenvolvimento da sua prática, ou seja, é um conhecimento que está enraizado na ação do professor e se manifesta no decorrer da mesma. Na ação pode surgir, também, o que Schön (1983) designa de reflexão na ação, uma vez que o professor age de acordo com o entendimento que tem das intervenções dos alunos. Esse tipo de reflexão distingue-se de um outro, que ocorre posteriormente à ação, a reflexão sobre a ação.

Para melhor se compreender o conhecimento profissional que os docentes mobilizam na sua prática, de seguida apresento diversos quadro teóricos que servem de base à identificação dos vários domínios que integram esse tipo de conhecimento. Ao longo do texto, sempre que me referir a conhecimento estou a aludir ao conhecimento profissional do professor de Matemática.

Shulman (1986), num trabalho que marcou fortemente este campo de estudo, apresenta o conhecimento organizado em três categorias: conhecimento do conteúdo, conhecimento da pedagogia e conhecimento do currículo. No conhecimento do conteúdo encontra-se o conhecimento dos assuntos (*subject matter knowledge*), que está relacionado com a organização do conhecimento na cabeça do professor. Esse tipo de conhecimento prevê que os professores conheçam conceitos e procedimentos, que os compreendam independentemente do contexto e estabeleçam relações entre diversas ideias matemáticas, por exemplo, como se relaciona o conceito de fração com o de divisão (Ball, 1990). Focando a Álgebra, área de conhecimento do conteúdo deste estudo, em particular o tópico Funções, Even (1990) propõe sete aspetos essenciais relacionados com o conhecimento dos assuntos para o ensino deste tópico: *i)* caraterísticas essenciais (*essential features*), que dizem respeito ao conhecimento do conceito; *ii)* diferentes representações para o conceito (*different representations*); *iii)* abordagens alternativas (*alternative ways of approaching*), por exemplo, a partir do estudo das sucessões; *iv)* poder do conceito (*the strength of the concept*), entendido na relação que estabelece com outros conceitos; *v)* conjunto de ferramentas básicas para abordar o conceito (*basic repertoire*), que inclui o conhecimento de exemplos, propriedades, teoremas; *vi)* conhecimento e compreensão do conceito (*knowledge and understanding of a concept*), quer em termos de procedimentos, quer em termos conceptuais; e *vii)* conhecimento sobre Matemática (*knowledge about Mathematics*), já que, por exemplo, um fraco conhecimento sobre o raciocínio dedutivo e indutivo pode comprometer o ensino do conceito de função, nomeadamente, quanto à generalização.

Na segunda categoria insere-se o conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical content knowledge*) que sai da esfera do que cada um precisa *saber sobre* para entrar na esfera do que é necessário *saber para ensinar*, ou seja, para tornar os assuntos compreensíveis para os outros, neste caso, alunos. É uma forma especial de conhecimento do conteúdo, que inclui o conhecimento: dos diversos assuntos dentro de cada tema matemático; de diferentes formas de representação, exemplos, explicações, demonstrações; e das dificuldades que os alunos podem enfrentar na aprendizagem de um dado assunto e respetivas causas e estratégias para as ultrapassar. O conhecimento pedagógico do conteúdo tem particular interesse, já que é apresentado como uma combinação especial de conteúdo e pedagogia, porque está relacionado com a compreensão de como os assuntos se organizam, representam e como devem ser explorados com os alunos, sendo esse o tipo de conhecimento que distingue os matemáticos dos educadores.

Para Ball e Bass (2000), o conhecimento pedagógico do conteúdo é uma "forma especial de conhecimento que agrupa conhecimento matemático com conhecimento dos alunos, aprendizagem e didática (p. 88)". Nessa linha, Ball (1990) introduz o conhecimento substantivo da Matemática como sendo o conhecimento dos assuntos necessário para o ensino, distinguindo assim o conhecimento de Matemática do conhecimento sobre Matemática, ou seja, o conhecimento sobre determinado conceito ou procedimento e o conhecimento necessário para o ensinar.

O conhecimento do currículo (*curricular knowledge*) está relacionado com o conhecimento de programas e materiais curriculares, que funcionam como ferramentas para o professor, e pressupõe o conhecimento horizontal do currículo (relacionado com a capacidade de relacionar o que se aprende numa aula com as outras disciplinas) e vertical (capacidade para relacionar o que se está a ensinar com o que aprenderam em anos anteriores ou vão aprender futuramente).

Pela importância que atribuem ao conhecimento pedagógico do conteúdo, An, Kulm e Wu (2004) comparam esse tipo de conhecimento matemático dos professores da China com os dos Estados Unidos e concluem que existem diferenças significativas entres eles, com impacto nas suas práticas letivas. Os professores chineses, influenciados por práticas tradicionais, enfatizam o conhecimento procedimental e conceptual, enquanto os professores americanos privilegiam uma diversidade de atividades que promovem a criatividade e a reflexão, com vista ao desenvolvimento de uma compreensão dos conceitos matemáticos. Os autores entendem o conhecimento pedagógico do conteúdo como o conhecimento efetivo do ensino, ou seja, como uma relação interativa entre conhecimento do conteúdo, do currículo e do ensino, na medida em que está relacionado com o *como ensinar* e *como compreender* o pensamento dos alunos. Essa relação interativa evidencia que o conhecimento do ensino pode ser melhorado pelo conteúdo e currículo e é influenciado pelas crenças dos professores. A esse propósito, Beswick, Callingham e Watson (2012) mostram que os professores atuam de acordo com as suas crenças como se se tratassem de conhecimento.

Shulman, em 1987, acrescenta quatro novas categorias ao seu modelo anterior, para o estudo do conhecimento do professor na promoção de um ensino voltado para a compreensão, que se referem a aspetos gerais do conhecimento: *i)* conhecimento pedagógico geral (*general pedagogical knowledge*), que está relacionado com as estratégias de sala de aula; *ii)* conhecimento dos alunos incluindo as suas características (*knowledge of learners and their characteristics*); *iii)* conhecimento dos contextos de ensino (*knowledge of educational contexts*), marcado pelas caraterísticas da comunidade onde os alunos se inserem; e *iv)* conhecimento dos propósitos e valores educativos (*knowledge of educational ends, purposes, and values and their philosophical and historical grounds*). Essas novas dimensões destacam a importância do professor conhecer dinâmicas de sala de aula e o contexto educativo onde o ensino vai decorrer, trazendo para grande plano a vertente social e cultural do ensino e fazendo sobressair que só o conhecimento desses aspetos ajudam na mobilização do conhecimento do currículo e do conteúdo no conhecimento pedagógico do conteúdo.

Tendo por base os estudos de Shulman (1986), em especial no que se refere ao conhecimento dos assuntos e ao conhecimento pedagógico do conteúdo, Rowland, Huckstep e Thwaites (2003) apresentam o quadro teórico *knowledge quartet*, que pressupõe a organização do conhecimento do professor em quatro categorias: fundação (foundation); transformação (*transformation*); relação (*connection*); e contingência (*contingency*). A primeira categoria refere-se ao conhecimento, crenças, valores, convicções e compreensões que os professores adquirem na sua formação em preparação para o exercício da sua função, por exemplo, saber que ensinar a subtração envolve ensinar o sentido de comparação. A segunda categoria está relacionada com o conhecimento em ação, que se traduz na capacidade de transformar o seu conhecimento do conteúdo em formas pedagógicas poderosas, envolvendo o conhecimento de exemplos, explicações, demostrações e representações. Quanto à relação entre exemplos e representações, num trabalho posterior, com futuros professores, Rowland e colegas (2014) concluem que o conhecimento matemático que estes aprendem na sua formação inicial não é suficiente para a sua prática.

A terceira categoria está relacionada com a forma como o professor organiza o ensino, por exemplo, a forma como sequencia as tarefas para uma aula e que pressupõe o conhecimento de relações que se podem estabelecer dentro desse tópico e da Matemática, identificando conexões entre as ideias dos alunos e os conteúdos abordados nas aulas. A quarta categoria está relacionada com os aspetos de sala de aula que não se conseguem prever à partida, como, por exemplo, perguntas dos alunos, ideias que podem desenvolver, resoluções que podem apresentar.

No desenvolvimento da prática docente, Sherin (2002b) salienta que os professores aprendem enquanto ensinam, ocorrendo essa aprendizagem através da negociação de três domínios de conhecimento: o conhecimento dos assuntos; o conhecimento dos materiais curriculares e o conhecimento de como os alunos aprendem. De facto, segundo a autora, o conhecimento do conteúdo é modificado durante o ensino, já que muitas vezes os professores sentem necessidade de modificar ou adaptar as suas práticas para melhor responderem às necessidades dos alunos. Essa mudança conduz ao desenvolvimento de novas práticas de ensino e, consequentemente, a novo conhecimento do conteúdo. Nessa atuação em sala de aula, os professores não usam somente o seu conhecimento dos assuntos, nem só o seu conhecimento pedagógico do conteúdo, mas ambos de forma integrada com o seu conhecimento do currículo.

Tendo em conta a forma como os professores utilizam os materiais didáticos, Sherin (2002b) identifica três tipos de interações entre o conhecimento do conteúdo e a gestão do currículo: *i)* transformação (*transform)*, os professores usam o seu conhecimento do conteúdo na exploração de uma nova aula, podendo conduzi-la de forma distinta da pensada pelos que conceberam os materiais curriculares, assim não muda o conhecimento do conteúdo do professor mas a aula, ou seja, o professor muda a aula de acordo com o seu conhecimento; *ii)* adaptação (*adapt*), os professores desenvolvem novo conhecimento do conteúdo e exploram a aula de acordo com o pensado, mudando assim o conhecimento do professor e não o plano de aula; e *iii)* negociação (*negotiate*), os professores desenvolvem novo conhecimento do conteúdo, de acordo com o que decorre em contexto de sala de aula, ou seja, usam esse conhecimento para interpretar as situações que decorrem durante o ensino e tomar decisões durante a ação, por exemplo, um aluno apresenta uma ideia e o professor muda o inicialmente previsto para explorar e ampliar a ideia do aluno, dando-lhe oportunidade para explorar e discutir novas ideias, traduzindo-se no que, habitualmente, se designa de reflexão na ação (Schön, 1983). Pelas exigências inerentes a esse tipo de interação, o estudo desenvolvido por Sherin (2002b) revela a ocorrência da *negociação* num número menor de aulas observadas. Contudo, a professora estudada mudou o seu conhecimento do conteúdo e desenvolveu novas compreensões sobre os assuntos e novas estratégias pedagógicas na lecionação do conceito matemático (declive).

Tendo por base os trabalhos de Shulman (1986, 1987), Hill, Schilling e Ball (2004) referem que para ensinar para a compreensão, o professor necessita, também, de um conhecimento especializado do conteúdo (*specialized content knowledge*), que se traduz na análise e construção de representações alternativas, na apresentação de explicações e na interpretação e avaliação de estratégias de resolução diferentes das usuais, para além do conhecimento comum do conteúdo (*common content knowledge*), relacionado com o conhecimento matemático que qualquer indivíduo possui, não sendo portanto exclusivo dos professores (Hill & Ball, 2004). Esses dois tipos de conhecimento compõem o conhecimento dos assuntos de Shulman (1986, 1987).

O conhecimento que integra os aspetos discutidos anteriormente, como saber explicar conceitos e procedimentos, interpretar ideias dos alunos, avaliar informação de documentos curriculares, usar diversas representações, apresentar exemplos, fazer demonstrações é designado por Hill e colegas (2005) como conhecimento matemático para ensinar (*mathematical knowledge for teaching* – MKT), ou seja, é o conhecimento necessário para trabalhar no ensino da Matemática. Esse conhecimento é sistematizado por Ball e colegas (2008), a partir dos trabalhos anteriores, mas onde introduzem novos domínios de conhecimento. No desenvolvimento da sua teoria, assume particular destaque o conhecimento dos assuntos e o conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman (1986, 1987), onde os autores procuram clarificar os conceitos e respetivo alcance, dedicando um interesse especial ao conhecimento pedagógico do conteúdo, na medida em que esse estabelece relação entre conhecimento do conteúdo e prática de ensino.

Para Ball e colegas (2008), o conhecimento matemático para ensinar inclui quatro domínios principais: conhecimento comum do conteúdo (CCK) (*common content knowledge*), conhecimento especializado do conteúdo (SCK) (*specialized content knowledge*), conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS) (*knowledge of content and students*) e conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) (*knowledge of content and teaching*). O primeiro domínio diz respeito ao conhecimento matemático usado em contexto de ensino, ou seja, ao conhecimento que os professores necessitam para conhecer, por exemplo, conceitos e notações, para saber quando os alunos dão uma resposta errada, ou para apreciar quando os materiais curriculares apresentam uma definição incorreta, estando assim relacionado com o conhecimento dos assuntos de Shulman (1986). Para Ribeiro e Carrillo (2012), o conhecimento comum do conteúdo está associado ao "como fazer". Esse tipo de conhecimento diz respeito ao conhecimento que "está dentro da cabeça do professor", ao que o professor sabe sobre determinado conteúdo. O segundo domínio diz respeito a um conhecimento específico do ensino, isto é, ao conhecimento necessário para compreender os erros dos alunos e para avaliar se uma abordagem diferente das usuais se pode aplicar em qualquer contexto, para interpretar conceitos de diversas formas e para definir trajetórias no sentido de promover a aprendizagem desse conceito. Esse tipo de conhecimento exige mais do que o que é preciso para ensinar os alunos (Ball et al., 2008), já que está associado ao "como ensinar a fazer" ou ao "como ensinar para a compreensão" e não para a memorização (Ribeiro & Carrillo, 2012). Cengiz e colegas (2011) combinam o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo num novo domínio que designam de conhecimento do conteúdo (*content knowledge* - CC).

O domínio do conhecimento do conteúdo e dos alunos pressupõe que o professor seja capaz de antecipar dificuldades e raciocínios dos alunos na realização de determinada tarefa e, portanto, combina o conhecimento da Matemática com o conhecimento dos alunos (conceções e erros), ou seja, é o conhecimento do conteúdo ligado ao conhecimento de como os alunos pensam ou aprendem (Hill, Ball, & Schilling, 2008). Esse tipo de conhecimento distingue-se do conhecimento dos assuntos, na medida em que um professor pode ter muito conhecimento de Matemática e pouco do ensino de Matemática.

O trabalho de Morris, Hiebert e Spitzer (2009) mostra que os futuros professores, quando confrontados com situações onde têm de antecipar possíveis respostas e analisar resoluções de alunos justificando os seus raciocínios, são capazes de mostrar um conhecimento aprofundado relativamente aos conceitos, evidenciando conhecimento especializado do conteúdo, mas incapazes de mobilizar esse conhecimento em situações de ensino, nomeadamente, na planificação e na avaliação de situações concretas de sala de aula. Esses resultados sublinham a tese de que um professor não pode apenar saber, mas necessita também saber porquê, de forma a promover um ensino voltado para a compreensão, que se traduz em ganhos para a aprendizagem dos alunos. Ball (1990) já havia concluído antes, que os futuros professores não possuem um conhecimento necessário para o ensino da Matemática com compreensão. Em 2010, Baumert e colegas concluíram que o conhecimento pedagógico do conteúdo traz mais ganhos para a aprendizagem dos alunos do que o conhecimento do conteúdo e que esses conhecimentos são teórica e empiricamente distintos.

O último domínio concilia o conhecimento da Matemática com o conhecimento do ensino, já que para promover a aprendizagem o professor tem de ser capaz de definir exemplos a apresentar, representações a usar, questões a colocar, justificações a solicitar e organizar e conduzir discussões matemáticas (Hill, 2010). Na condução de uma discussão é fundamental que o professor consiga decidir quando deve continuar a discussão de uma ideia ou parar para pedir clarificações e usar ideias dos alunos para fazer observações matemáticas. A esses domínios, Ball e colegas (2008) acrescentam ainda o *i)* conhecimento do horizonte do conteúdo (*horizon content knowledge*), que diz respeito à relação entre os assuntos de Matemática dentro do currículo e ao estabelecimento de conexões; e *ii)* o conhecimento do conteúdo e do currículo (*knowledge of content and curriculum*) de Shulman (1986, 1987). O conhecimento do horizonte do conteúdo está relacionado com o conhecimento vertical do currículo de Shulman (1986). Os *domínios do conhecimento matemático para ensinar* estão representados na figura 6.

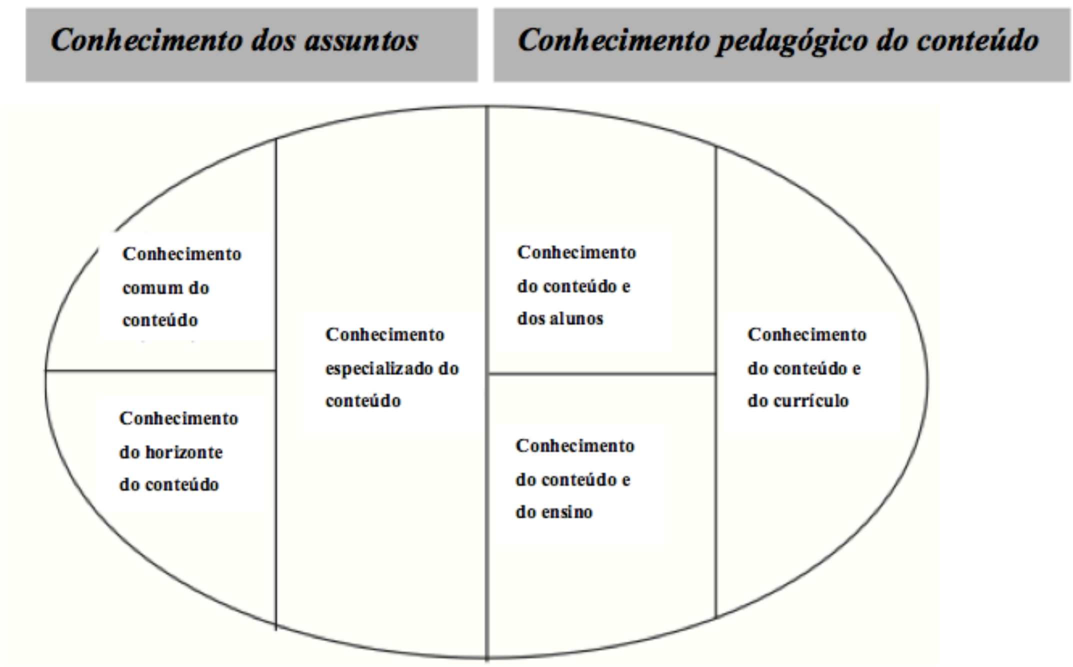


Figura 6: Domínios do conhecimento matemático para ensinar (Ball et al., 2008, p. 403).

É de salientar que este quadro teórico se distingue do modelo *knowledge quartet* (Rowland et al., 2003), na medida em que o seu propósito é reconhecer diferentes tipos de conhecimento, enquanto o segundo quadro teórico se foca na identificação de situações nas quais o conhecimento matemático se revela no ensino. Assim, os quadros complementam-se e influenciam-se um ao outro (Rowland, 2014).

O quadro teórico *Conhecimento matemático para ensinar* (Ball et al., 2008), atendendo à sua finalidade, tem sido usado por Hill e Ball (2009) para avaliar o conhecimento dos professores através de um conjunto de questões de escolha múltipla, onde têm de interpretar, analisar e dar explicações para o trabalho dos alunos e estabelecer relações entre símbolos matemáticos e representações pictóricas. Um estudo de caso com cinco professores, desenvolvido por Hill e colegas (2008), mostra que existe uma correlação forte entre o conhecimento matemático do professor para ensinar e a qualidade do seu ensino, entendida esta como um conjunto de aspetos que caracterizam o rigor e a riqueza da aula, evidentes nas justificações e explicações matemáticas apresentadas, nas representações usadas e na ausência de erros. Esse estudo revela a presença de erros matemáticos, incluindo de linguagem, a falta de conexões e uma fraca profundidade nas interpretações das ideias dos alunos. A importância do uso de uma linguagem adequada é também frisada, quanto ao conhecimento do conteúdo e do ensino, no estudo de Cengiz e colegas (2011), baseado na realização de entrevistas e observações de aulas de seis professores do ensino básico, como elemento estruturante de um trabalho para a compreensão. O estudo de Hill e colegas (2008) revela, ainda, que os professores, relativamente ao conhecimento do conteúdo, são capazes de descrever importantes ideias matemáticas e métodos de resolução e quanto ao conhecimento do conteúdo e dos alunos discutem o que os alunos sabem sobre o conteúdo a abordar, assim como as ideias que são mais fáceis ou difíceis de compreender. Esses três domínios do conhecimento matemático para ensinar apoiam os professores na seleção de ações de ensino fundamentais à criação de oportunidades para ampliar o pensamento dos alunos, ajudando-os a decidir sobre as ideias a acompanhar e como segui-las na discussão.

Nesse quadro teórico, o estudo de natureza quantitativa conduzido por Hill (2010), com uma amostra representativa de 625 professores, no âmbito do projeto "The learning mathematics for teaching", que consiste na análise de perguntas de escolha múltipla relacionadas com os tópicos matemáticos dos números inteiros e racionais, evidencia relações pouco significativas entre o conhecimento matemático para ensinar e as características do professor, principalmente nas atitudes de liderança e de preparação matemática. Contudo, o estudo evidencia que os professores têm mais facilidade em responder a questões relacionadas com o conhecimento comum do conteúdo do que a questões associadas ao conhecimento especializado e/ou pedagógico do conteúdo, assim como a questões que apelam à interpretação do trabalho dos alunos ou representação de conteúdos, do que à explicação de raciocínios desenvolvidos pelos alunos.

Ball e colegas (2008) reconhecem algumas fragilidades ao seu modelo, que estão relacionadas com o carácter estático que pode estar associado às suas categorias e à dificuldade em perceber o alcance de cada uma delas perante uma determinada situação, não conseguindo assim alcançar totalmente os objetivos a que se tinham proposto.

Ponte (2012) procura resolver o problema da segmentação e falta de dinâmica do modelo *Conhecimento matemático para ensinar* (Ball et al., 2008), apresentando uma alternativa que não considera o conhecimento organizado em categorias, mas adota uma perspetiva que integra diversos aspetos, onde o mais importante é o que diz respeito à prática letiva, dado que é o tipo de conhecimento que evidencia de forma mais marcante a especificidade da disciplina de Matemática, e que designa por conhecimento didático (Figura 7).

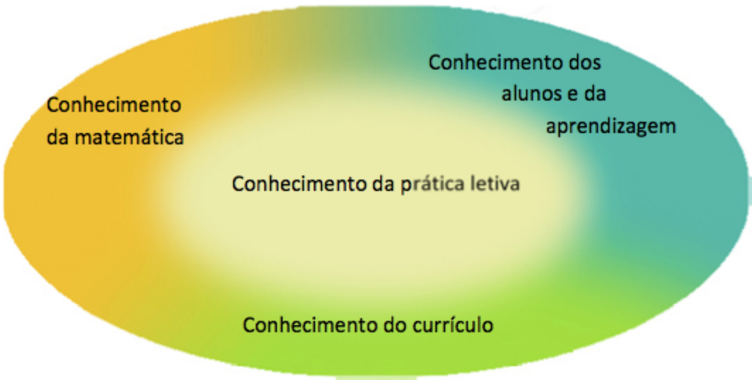


Figura 7: Aspetos do conhecimento didático (Adaptado de Ponte, 2012, p. 87).

Esse modelo inclui quatro áreas de conhecimento, colocando a prática letiva no centro, porque numa aula o professor mobiliza diferentes tipos de conhecimento que devidamente articulados fornecem as ferramentas necessárias para uma boa condução da aula. Nesse modelo, o conhecimento da Matemática não é encarado como o conhecimento da Matemática enquanto ciência, mas da compreensão que o professor tem da Matemática enquanto disciplina escolar, onde desempenham um papel importante os conceitos, os procedimentos, as representações e as conexões. O conhecimento dos alunos e da aprendizagem é também essencial no trabalho do professor. De facto, é fundamental que o professor conheça bem os seus alunos e as suas formas de pensar para promover uma boa aprendizagem. O conhecimento do currículo pressupõe, da parte do professor, um bom conhecimento dos documentos oficiais que orientam o seu trabalho, nomeadamente, o programa de Matemática, já que lhe permite estruturar o seu ensino e justificar opções tomadas. O conhecimento da prática letiva está relacionado com alguns elementos da gestão curricular, à semelhança do conhecimento do currículo. Esta vertente do conhecimento inclui

> a planificação de longo e médio prazo bem como o plano de cada aula, a conceção das tarefas e tudo o que respeita à condução das aulas de Matemática, nomeadamente as formas de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor (Ponte, 2012, p. 88).

Nesse trabalho, o conhecimento do professor é encarado como conhecimento, que embora relacionado com a prática também se encontra diretamente ligado a outras vertentes do conhecimento, como o conhecimento do contexto (escola, sociedade) e do próprio professor (Ponte, 2012). Assumindo que o conhecimento do professor é multidimensional, é importante olhar para ele numa perspetiva integradora onde se conjugam diversos elementos da prática letiva, inserida no seu contexto educativo e social.

Um grupo de investigadores da Universidade de Huelva (Aguilar et al., 2013) desenvolve o modelo Conhecimento Especializado do Professor de Matemática: MTSK (*Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*), a partir da reformulação do quadro teórico *Conhecimento matemático para ensinar* (Ball et al., 2008), com vista a resolver os problemas de delimitação deste quadro teórico. Esta mesma preocupação já tinha sido manifestada por Ponte (2012).

O modelo Conhecimento Especializado do Professor de Matemática: MTSK procura determinar a natureza de cada domínio, assim como o conhecimento do professor necessário para a sua prática (Aguilar et al., 2013; González, 2014). Estes autores encaram todo o conhecimento do professor como especializado, na medida em que se questionam se conhecer, por exemplo, os diversos sentidos do número racional escrito sob a forma de fração é conhecimento comum ou especializado, se qualquer cidadão instruído tem que ter esse conhecimento? Assim, defendem que é preferível caracterizar o conhecimento de modo intrínseco, sem fazer referência a profissões. Acrescentam, ainda, que não se deve separar o conhecimento especializado do conteúdo do conhecimento do conteúdo e dos alunos, questionando qual a pertinência de enquadrar a origem do erro num domínio e a consciência de que o erro existe noutro.

O modelo *Conhecimento Especializado do Professor de Matemática* apresenta-se organizado em dois grandes domínios: o domínio do conhecimento do conteúdo matemático (MK) (*dominio del conocimiento matemático*) e o domínio do conhecimento didático do conteúdo (PCK) (*dominio del conocimiento didáctico del contenido*), dividido cada um em três subdomínios, como se mostra a seguir (Figura 8).

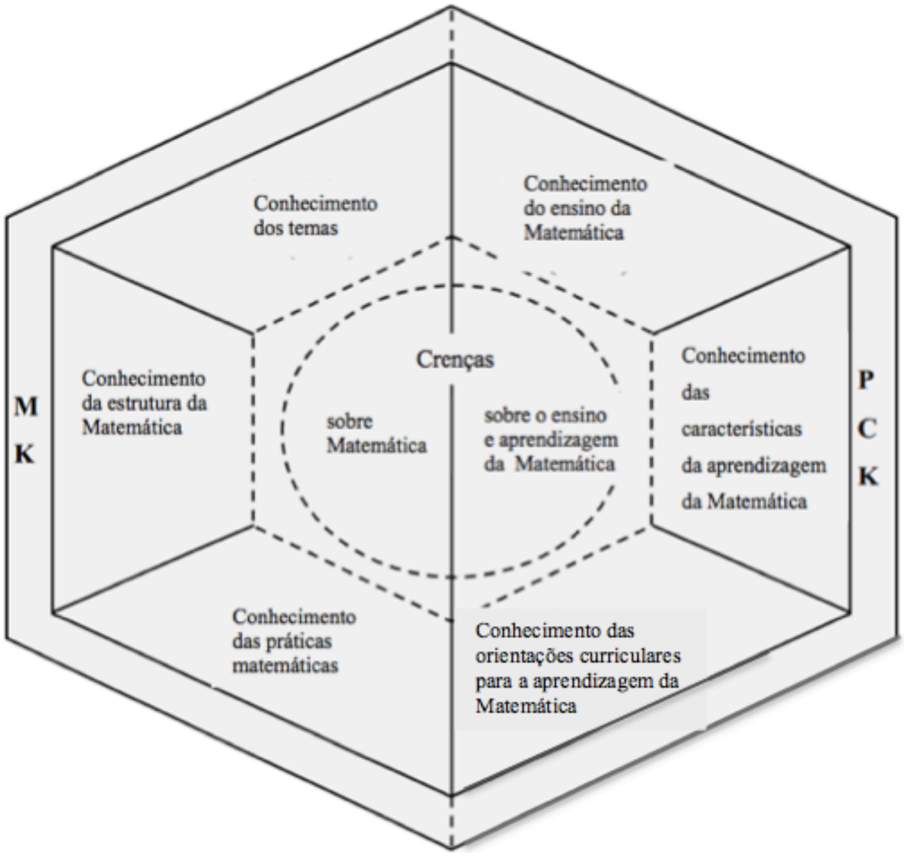


Figura 8: Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (Aguilar et al., 2013, p. 5054).

O domínio conhecimento do conteúdo matemático engloba o conhecimento dos temas (*conocimiento de los temas*), que pressupõe o conhecimento da Matemática escolar, nomeadamente, o conhecimento de procedimentos, exemplos e representações para um determinado conceito, sendo mais amplo que o conhecimento da Matemática como disciplina; o conhecimento da estrutura da Matemática (*conocimiento de la estructura de la Matemática*), que inclui o conhecimento integral do conceito, desde a sua forma mais elementar à mais complexa, contemplando conexões entre os conteúdos anteriores e os seguintes; e o conhecimento das práticas matemáticas (*conocimiento de la práctica matemática*), que implica saber demonstrar, definir conceitos, estabelecer relações, comunicar, argumentar e selecionar as representações mais adequadas a certo conceito. O conhecimento da estrutura da matemática aproxima-se do conhecimento do horizonte do conteúdo do modelo *Conhecimento matemático para ensinar* (Ball et al., 2008).

O domínio do conhecimento didático do conteúdo abarca o conhecimento das características da aprendizagem da Matemática (*conocimiento de las características de aprendizaje de las Matemáticas*), que supõe conhecer de que modo o aluno pode pensar na resolução de uma determinada tarefa matemática, que oportunidades devem ser proporcionadas aos alunos para a aprendizagem de certo conteúdo matemático e que dificuldades podem enfrentar na aprendizagem desse conteúdo; o conhecimento do ensino da Matemática (*conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas*), que é mobilizado na escolha de determinada representação, material, exemplo ou tarefa para a abordagem a certo conceito, pressupondo o conhecimento de estratégias de ensino que promovam a aprendizagem desse conceito, de forma a torná-lo compreensível para os alunos; e o conhecimento das orientações curriculares para a aprendizagem da Matemática (*conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas*), que se revela no conhecimento dos programas e documentos curriculares, de modo a conhecer as aprendizagens que os alunos devem realizar quanto a conceitos e procedimentos, assim como relativamente ao raciocínio, à comunicação e à resolução de problemas. Esse tipo de conhecimento corresponde ao conhecimento do conteúdo e do currículo do modelo *Conhecimento matemático para ensinar* (Ball et al., 2008). Apesar do modelo *Conhecimento Especializado do Professor de Matemática* (Aguilar et al., 2013) se focar na especificidade do conhecimento do professor de Matemática relativamente ao ensino dos conteúdos, considera que o conhecimento do professor não pode ser analisado desligado das suas crenças relativamente à Matemática e ao ensino e aprendizagem da Matemática.

Os diversos quadros teóricos apresentados para o estudo do conhecimento do professor, emergem dos trabalhos de Shulman (1986; 1987) com o propósito claro de clarificar conceitos e alcance de cada domínio. Apesar de introduzirem ideias novas e importantes para a caracterização das diversas vertentes do conhecimento do professor, os modelos organizam o conhecimento do professor em categorias independentes, o que faz com que se perca a dinâmica entre as diversas vertentes do conhecimento. Por exemplo, no último quadro teórico apresentado, o conhecimento da prática matemática devia surgir na dinâmica entre conhecimento matemático e conhecimento didático e não isolado no domínio matemático. Ainda refletindo sobre a falta de dinâmica entre os dois domínios, questiono a independência entre o conhecimento dos temas e o conhecimento das orientações curriculares para a aprendizagem, assim como entre o conhecimento da estrutura da Matemática e o conhecimento das orientações curriculares para a aprendizagem. Focando o conhecimento dos temas e o conhecimento das orientações curriculares para a aprendizagem, é discutível a separação dessas vertentes do conhecimento, na medida em que me parece que o conhecimento de exemplos, procedimentos e representações beneficia do conhecimento do currículo – o que é esperado que os alunos alcancem para cada conteúdo sobre esses aspetos. Quanto ao conhecimento da estrutura da Matemática e do conhecimento das orientações curriculares para a aprendizagem, é para mim evidente a articulação entre estes dois aspetos do conhecimento, já que, por exemplo, o estabelecimento de relações entre os conteúdos é potenciado pelo conhecimento das orientações curriculares.

A reflexão que faço sobre a falta de dinâmica entre as diversas vertentes do conhecimento está também presente dentro de cada domínio do modelo *Conhecimento Especializado do Professor de Matemática* (Aguilar et al., 2013). Por exemplo, no domínio do conhecimento do conteúdo matemático, não parece benéfico separar o conhecimento dos temas do conhecimento das práticas matemáticas, uma vez que para mim esses dois aspetos estão muito próximos e o segundo subdomínio surge como uma continuidade do primeiro, já que, por exemplo, para estabelecer conexões e selecionar representações adequadas para um certo conceito é fundamental um conhecimento aprofundado desse assunto. Relativamente ao domínio do conhecimento didático do conteúdo, a falta de relação entre o conhecimento das características da aprendizagem da Matemática e o conhecimento do ensino da Matemática é pouco aceitável, pois só o conhecimento de como os alunos podem pensar sobre determinado assunto, das dificuldades que podem sentir e das experiências de aprendizagem que lhes podem ser proporcionadas justifica a seleção de estratégias de ensino a seguir, nomeadamente, as tarefas a escolher e os materiais a usar. Ainda neste domínio, reflito sobre a independência entre o conhecimento das características da aprendizagem da Matemática e o conhecimento das orientações curriculares para a aprendizagem, uma vez que o conhecimento de como os alunos podem pensar em certos conteúdos, ou as dificuldades que podem enfrentar na sua aprendizagem está relacionado com o que é esperado que os alunos aprendam em termos curriculares, assim como as experiências que os professores oferecem aos seus alunos devem estar em conformidade com o que é expectável em termos de orientações curriculares.

Globalmente, parece-me que o modelo *Conhecimento Especializado do Professor de Matemática* (Aguilar et al., 2013) deve valorizar mais o papel da comunicação matemática nas diversas vertentes do conhecimento, explorando o contributo da comunicação na articulação das mesmas, já que a comunicação é uma ferramenta poderosa na promoção da aprendizagem dos alunos.

Como forma de ultrapassar as limitações apontadas, neste trabalho sigo o quadro teórico de Ponte (2012), por encarar o conhecimento como um todo que ganha expressão na relação que estabelece com diversas componentes, como o currículo, os alunos e a aprendizagem, a prática letiva e a Matemática. A aprendizagem dos alunos decorre da interação constante entre professor e alunos e das experiências de aprendizagens proporcionadas pelo professor, que são sustentadas no seu conhecimento, ou seja, na forma como interpreta e implementa o currículo, como mobiliza o seu conhecimento matemático com o conhecimento do currículo e estes dois de forma articulada com a prática de sala de aula. Assim, o seu conhecimento matemático e o seu conhecimento do currículo ganham expressão na forma como o professor os mobiliza para selecionar as tarefas a apresentar aos seus alunos, os recursos a disponibilizar; para definir o modo de trabalho dos alunos mais adequado à resolução da tarefa, os exemplos a sugerir, as representações a explorar; para promover a discussão em coletivo e para envolver os alunos no processo de negociação de significados e na sistematização das principais ideias matemáticas.

Os modelos *Conhecimento matemático para ensinar* (Ball et al., 2008) e *Conhecimento Especializado do Professor de Matemática* (Aguilar et al., 2013) são ferramentas poderosas na identificação dos diversos tipos de conhecimento que o professor mobiliza no desenvolvimento da sua prática letiva. O reconhecimento dessas vertentes do conhecimento pode ser favorecido pela seleção de episódios de ensino, ao centrarem a atenção em momentos específicos da aula. O quadro teórico introduzido por Hiebert, Morris, Berk e Jansen (2007) responde a esse propósito através de quatro ideias principais. A primeira ideia do modelo – *definir objetivos de aprendizagem para os alunos* – revela a sua pertinência na análise do que o aluno aprende e do que é considerado válido, em termos de procedimentos, e representações e contribui para a ideia seguinte – *avaliar se os objetivos foram atingidos durante a aula* – através da recolha de evidências de ensino. Com base nesse trabalho, procura-se, posteriormente, compreender e explicar determinados acontecimentos da aula, que está relacionado com a terceira ideia – *avançar com hipóteses explicativas para o que funcionou bem ou mal*. Essa ideia estabelece uma ponte entre a segunda e a quarta – *usar as hipóteses anteriores para propor melhorias* – já que proporciona uma ligação entre a análise de ensino e a melhoria desse ensino. As três primeiras ideias providenciam as informações necessárias que permitem sustentar as decisões e propostas de melhorias tomadas na quarta ideia. Em todo esse processo, os professores observam e interpretam as interações que ocorrem na sala de aula, apoiando-se no seu conhecimento. Observar pressupõe reconhecer situações importantes de sala de aula, quanto ao que os alunos dizem, as representações que usam, o que pensam sobre determinado conceito; estabelecer relações com os objetivos de aprendizagem; e avançar com explicações para essas situações (van Es & Sherin, 2002). Essa prática é bastante sustentada pelo conhecimento do professor e pode ser apoiada em gravações vídeo. van Es e Sherin (2002) desenvolvem a ferramenta VAST – *Vídeo Analysis Support Tool* para ajudar os professores a observar, a partir da identificação de situações importantes de interação em sala de aula e da sua interpretação.

Fica bem presente no acabado de expor que o conhecimento do professor atravessa todo o processo de observação e esse processo de seleção de episódios de ensino contribui para o estudo das vertentes que integram o conhecimento do professor. Existe, assim, uma influência mútua entre os modelos apresentados.

Os diversos estudos citados permitem concluir que o conhecimento do professor afeta o seu ensino, por exemplo, na linguagem que usa na sala de aula, nas conexões que consegue estabelecer, nas diversas interpretações que faz dos trabalhos dos alunos, na forma como conduz a discussão e como envolve os alunos nesse momento. É importante continuar a estudar o conhecimento que o professor mobiliza no desenvolvimento da sua prática, de forma a contribuir para uma melhor compreensão do processo de ensino e aprendizagem.

Síntese

O professor desempenha um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, sendo fundamental analisar como age em situações de ensino e o conhecimento que mobiliza nessa atuação. De facto, o que o professor ensina e como ensina está relacionado com o que sabe. Ensinar é uma prática complexa, já que pressupõe interpretar as ideias dos alunos, os seus erros, as suas resoluções e avaliar quando são matematicamente válidas, e utilizar diversas representações para explicar conceitos e procedimentos, de forma a tornar os assuntos acessíveis aos alunos.

A ação do professor é preponderante nas experiências de aprendizagem que proporciona aos seus alunos e que se reflete nas tarefas que seleciona, no modo de trabalho que propõe para a realização dessas tarefas, nos materiais que usa na sala de aula, no discurso que promove e na forma como envolve os alunos no processo de negociação e sistematização das ideias matemáticas.

No exercício das suas funções tira partido de um amplo e profundo conhecimento profissional, isto é, um conhecimento específico e validado para o desempenho das suas funções de professor. Esse conhecimento integra os saberes relativos à Matemática, aos alunos, ao contexto educativo e social, ao currículo, ao ensino e aprendizagem da Matemática com os saberes da prática letiva, nomeadamente, tarefas, modo de trabalho dos alunos, desenvolvimento do raciocínio, da comunicação e da resolução de problemas, condução de discussões e avaliação. Essas oportunidades que o professor proporciona aos alunos na sala de aula vão influenciar a suas aprendizagens. Assim, é importante que elas sejam ricas e significativas.

É evidente que o conhecimento do professor influencia as suas práticas de ensino, assim como as suas práticas influenciam o seu conhecimento. Dessa forma, é importante continuar a estudar essa relação de mútua influência, para se progredir na complexa compreensão do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A colaboração, como elemento integrante das práticas profissionais, pode favorecer contextos de desenvolvimento profissional e contribuir para o estudo do conhecimento do professor, sendo um campo de estudo a explorar.

CAPÍTULO IV

Desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico

Este capítulo encontra-se organizado em duas secções. Na primeira, procuro analisar o que deve ser incluído na Álgebra que se ensina no 3.º ciclo do ensino básico, abordando o conceito de pensamento algébrico em duas das suas ideias-chave: generalização e simbolização. Na segunda, discuto as principais ideias subjacentes ao trabalho dos alunos nos tópicos matemáticos Sequências e regularidades, Funções e Equações, destacando conceitos, objetivos de aprendizagem e dificuldades que eles podem enfrentar e estratégias que podem usar.

Álgebra escolar

A Álgebra faz parte dos currículos escolares de Matemática desde há já muito tempo. No século XIX, a Álgebra era encarada como Aritmética generalizada, envolvendo a resolução de problemas com operações aritméticas onde os números podiam ser substituídos por símbolos. Em meados dos anos 50 do século passado, a Álgebra escolar passa a ser vista como um método concreto de justificação e generalização de situações específicas. Contudo, com o movimento do *back-to-basics*, dos anos 70, desse mesmo século, a Álgebra enfatiza, novamente, a manipulação simbólica e a resolução de equações (Kilpatrick & Izsák, 2008) e volta a ser entendida como Aritmética generalizada, privilegiando o estudo de procedimentos para resolver determinados problemas (Usiskin, 1988). Os símbolos algébricos e o trabalho com os mesmos voltam a ser reforçados, embora Usiskin (1988) não reduza a Álgebra à manipulação simbólica e a apresente, também, como o estudo de relações entre quantidades e estruturas. Com o mesmo entendimento, Kieran (1992) refere que a

Álgebra é um ramo da Matemática que trabalha com a simbolização de relações numéricas e estruturas matemáticas, operando sobre essas mesmas estruturas. Estas visões da Álgebra têm subjacentes diferentes usos para as variáveis – "ferramentas para expressar generalizações matemáticas" (Schoenfeld & Arcavi, 1999, p. 155). De facto, para Usiskin (1988), na Álgebra enquanto Aritmética generalizada, os símbolos são generalizações de determinados padrões, por exemplo a e b em $a + b = b + a$; na Álgebra como estudo de procedimentos, são incógnitas (x em $5x - 9 = 91$) ou constantes (π), já que os alunos aprendem a resolver ou simplificar equações. Na terceira conceção – Álgebra como estudo de relações entre quantidades – os símbolos surgem em fórmulas, por exemplo $A = c \times l$, onde os alunos estão interessados em estabelecer relações entre eles. Na Álgebra enquanto estudo de estruturas, as variáveis surgem como símbolos arbitrários, por exemplo $3x^2 + 6ax + a^2$. Nessa perspetiva, Usiskin (1999) refere que a Álgebra é uma linguagem que envolve o trabalho com incógnitas, fórmulas, generalizações, relações e *placeholders*.

Com a publicação, em 2000, das Normas do *National Council of Teachers of Mathematics*, a Álgebra ganha um novo estatuto passando a valorizar-se a relação com os outros temas matemáticos do currículo e a aplicação às outras disciplinas escolares (Kilpatrick & Izsák, 2008). É nesta perspetiva que Kaput (1998, 1999) apresenta a Álgebra como *i)* generalização e formalização de padrões e restrições; *ii)* manipulação simbólica; *iii)* estudo de estruturas abstratas de cálculos e relações; *iv)* estudo de funções, relações e variação conjunta; e *v)* modelação e linguagem, pois considerava que a Álgebra que se ensinava nas escolas não era mais do que um conjunto de procedimentos e problemas desligados das outras disciplinas e dos outros temas matemáticos e da realidade dos alunos. Contudo, é de salientar que Usiskin, já em 1988, introduz vertentes da Álgebra que vão para além do conhecimento e do trabalho com símbolos, frisando a importância do estudo de relações. Kaput (1998) considera, também, fundamental que os alunos compreendam este tema matemático, assim como a sua utilidade. Nas diversas vertentes da Álgebra, Kaput (1998) entende que os dois primeiros aspetos são centrais porque envolvem generalização e simbolização, que são atividades intrínsecas à Matemática e ao pensamento matemático. O terceiro e quarto aspetos são tópicos dos primeiros, pois estão relacionados com a Aritmética generalizada e com o estudo de funções, que envolvem generalização. O último ponto reflete a Álgebra como uma teia de linguagens que atravessa todas as outras, onde os alunos podem recorrer a diversas linguagens, por exemplo à computacional, para justificarem as suas conjeturas.

Uma outra conceção da Álgebra é apresentada por Lins e Kaput (2004) quando a apresentam como uma oportunidade que é dada aos alunos para generalizar propriedades aritméticas, introduzindo as ideias de: *i)* generalização intencional e expressão da mesma; e *ii)* raciocínio baseado em formas de generalização estruturadas. Esta visão alerta para a importância dos alunos pensarem sobre o uso da Álgebra e atribuírem significado às atividades algébricas, em oposição à visão tradicional da Álgebra como escrita e manipulação de equações (Johanning, 2004).

Em 2008, Kaput apresenta uma reformulação ao seu quadro teórico de 1998 e de 1999 e propõe a Álgebra como um corpo de conhecimentos que envolve dois aspetos centrais sustentados por três ramos. O primeiro aspeto diz respeito à simbolização, sendo a Álgebra caracterizada por uma simbolização sistemática de generalizações de regularidades e de restrições e o segundo à ação e raciocínio guiado sobre generalizações, onde a Álgebra surge como uma atividade. Neste caso, em que se privilegiam os pensamentos dos alunos, fala-se antes em raciocínio algébrico, sendo este encarado como uma atividade humana. Para Carraher e Schliemann (2007), o raciocínio algébrico é o "processo psicológico envolvido na resolução de problemas que os matemáticos facilmente traduzem usando notação algébrica" (p. 670) e é caracterizado "pela sua generalidade e pelo papel que as expressões simbólicas jogam no estabelecimento de relações gerais, comparando-as e manipulando-as, facilitando muitas avaliações numéricas" (Thompson & Smith III, 2008). Para Blanton e Kaput (2011), o raciocínio algébrico é uma atividade de generalização de ideias matemáticas que usa representações simbólicas e representa relações funcionais. Neste sentido, os cinco aspetos referidos por Kaput (1998, 1999), também podem ser encarados como formas de raciocínio algébrico no ensino para a compreensão.

No primeiro ramo, subjacente à definição de Kaput (2008), a Álgebra surge como o estudo de estruturas algébricas, no segundo, como o estudo de funções, relações e variações e, no último, como uma aplicação da linguagem de modelação. Desta forma, o primeiro ramo associa a Álgebra à Aritmética, já que inclui a generalização, com compreensão, de operações aritméticas e das suas propriedades. Esta ligação da Álgebra à Aritmética é bastante comum, uma vez que a Aritmética faz generalizações que na sua essência são Álgebra e, portanto, segundo Carraher e Schliemann (2007), a Aritmética pode ser encarada como uma parte da Álgebra, em vez de uma área distinta.

As discussões em torno deste tema matemático alertam para a necessidade da Álgebra escolar permitir aos alunos compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que orientam a manipulação simbólica, assim como o conhecimento sobre a utilização dos próprios símbolos para representar ideias matemáticas, fazendo emergir a ideia de pensamento algébrico.

Pensamento algébrico

O pensamento algébrico é um tipo de pensamento que resulta em afirmações gerais sobre números e estruturas, e pressupõe análise de casos particulares, formulação e justificação de conjeturas e generalização (Mason, 2008). Para Warren e Cooper (2008), este pensamento foca-se na identificação de relações matemáticas entre um conjunto de dados e na expressão dessas relações usando linguagem própria, sendo apoiado por atividades em que os alunos têm oportunidade de explorar padrões de repetição identificando o motivo, representando conjuntos de dados e expressando relações através de diversas representações (visual, tabela de valores, simbólica), exprimindo generalizações e argumentando sobre as mesmas.

Ainda na mesma linha, Smith (2008) refere que o pensamento algébrico envolve dois tipos de pensamento, o representacional e o simbólico. O primeiro está relacionado com os "processos mentais através dos quais cada indivíduo cria significado referencial para algum sistema representacional" (Smith, 2008, p. 133), que é determinante nos primeiros anos, porque é fundamental compreender como os alunos criam representações significantes e como fazem, expressam e justificam generalizações. Neste tipo de pensamento, as representações desempenham um papel essencial. O pensamento representacional, que incide nas "relações entre duas (ou mais) quantidades variáveis" (Smith, 2008, p. 143), designa-se por pensamento funcional. Neste tipo de pensamento, a interpretação sobre uma determinada relação é fundamental, uma vez que se vai refletir, posteriormente, na definição de função representante de uma relação. Para o desenvolvimento deste pensamento é importante que se criem momentos onde os alunos tenham oportunidade de conjeturar, argumentar e generalizar do seu próprio modo, recorrendo a métodos pessoais. A partilha de ideias é a base da negociação de significados e a reconstrução de novos conceitos e formas de os representar (Blanton & Kaput, 2011). O pensamento simbólico está relacionado com o modo como os alunos compreendem e usam o sistema de símbolos e as suas regras, assumindo a simbolização, neste tipo de pensamento, um lugar preponderante. Para Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico inclui três vertentes fundamentais: representar (capacidade para usar diversos tipos de representações), raciocinar (capacidade para relacionar e generalizar) e resolver problemas (inclui modelar situações).

As diversas visões apresentadas para o pensamento algébrico revelam que este se começa a desenvolver mesmo antes da entrada dos alunos na escola, através do significado que atribuem às suas experiências do dia-a-dia (Mason, 2008). Em particular, manifesta-se quando, através de conjeturas e argumentos matemáticos, se estabelecem generalizações sobre ideias matemáticas, utilizando uma linguagem cada vez mais formal (Kaput, 1998, 1999). Driscoll (1999) frisa, ainda, que esta manifestação também deve contemplar generalizações sobre funções, assim como analisar o impacto que esta estrutura tem no cálculo. De modo a facilitar o desenvolvimento destes aspetos, o autor propõe as seguintes estratégias, que designa de hábitos da mente: *i)* fazer-desfazer, já que o pensamento algébrico envolve reversibilidade; *ii)* construir regras para representar funções, uma vez que para o desenvolvimento do pensamento algébrico é importante reconhecer padrões e organizar dados definidos por regras funcionais; e *iii)* abstrair do cálculo, que pressupõe analisar cada situação independentemente dos números usados e tira partido do reconhecimento de regularidades entre os números envolvidos. De modo a ajudar os alunos a aprenderem esses hábitos, é importante que exista uma cultura de sala de aula que promova a sistematização das ideias e ajude os alunos na ampliação do seu pensamento, através de questões que reforcem a justificação e a reflexão (por exemplo, *Como é que esse número está relacionado com os outros*?, *Existe alguma regra*? *Como funciona*?, *Consegues prever o que vai acontecer sem efetuar todos os cálculos*?). Estas questões permitem: *i)* apoiar – ajudar os alunos na resolução da tarefa, organizando o seu trabalho; *ii)* clarificar – ajudar o aluno a esclarecer as suas ideias; *iii)* orientar – focar a atenção do aluno em determinados aspetos de modo a ajudá-lo a progredir ou a identificar o erro; *iv)* promover a reflexão matemática – levar os alunos a justificar e a refletir sobre as suas ideias; e *v)* provocar o pensamento algébrico – ajudar os alunos a descrever regras funcionais e a justificar generalizações.

O ensino atual da Álgebra deve enfatizar a compreensão, em vez de o reduzir a manipulação simbólica e a um conjunto de procedimentos. Esta perspetiva faz emergir o pensamento relacional. Esse tipo de pensamento envolve o uso de propriedades fundamentais das operações, como a propriedade associativa ou a distributiva e a noção de igualdade (recorrendo a factos conhecidos), para a resolução de um problema numa determinada situação (Empson, Levi, & Carpenter, 2011) e inclui a capacidade de analisar expressões e equações como um todo e não como um processo realizado por etapas (Frankle, Carpenter, & Battey, 2008). No desenvolvimento do pensamento relacional, o professor desempenha um papel relevante na promoção da comunicação matemática, já que é fundamental conhecer o modo de pensar dos alunos, assim como ajudá-los a perceber quando podem ou não desenvolver determinado raciocínio, que será fundamental ao desenvolvimento da capacidade de generalização (Baek, 2008; Frankle et al., 2008).

O trabalho com diversos tipos de sequências, de relações, de variações, de propriedades das operações que os alunos devem interpretar, resolver, representar e generalizar, usando uma linguagem cada vez mais formal, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico encarado nas suas diversas facetas.

Generalização

A ideia de generalização surge, de forma explícita, em várias visões da Álgebra, em particular na definição de Kaput (1998, 1999), ao apresentar a Álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, sendo também um aspeto essencial ao desenvolvimento do pensamento algébrico, onde Driscoll (1999) distingue dois tipos de generalização: generalização sobre funções e relações e generalização sobre estruturas e operações. Esta segunda ideia é identificada por "calcular sem cálculo" (Driscoll, 1999, p. 65) e pressupõe o desenvolvimento de uma compreensão global da situação, analisando, eventualmente, os números envolvidos e as operações ou condições impostas e está muito relacionada com o terceiro hábito da mente, apresentado pelo autor. Esta visão apresenta, também, características do pensamento relacional.

A generalização é um dos processos matemáticos mais importantes do pensamento, já que é aquele que permite olhar para além das particularidades de uma dada situação e estabelecer conclusões (Driscoll, 1999), isto é, pressupõe que determinada propriedade, técnica ou processo seja válida para um conjunto mais alargado de objetos ou condições. Contudo, para Smith (2008), a generalização "não é um processo indutivo baseado na experiência empírica, mas antes um processo interativo de decisão sobre as experiências que contam ou não como casos particulares de representações" (p. 140). Neste processo interativo, uma cultura de sala de aula que promova a discussão matemática é fundamental, já que é importante conhecer como os alunos pensam e justificam as suas ideias, para além do uso de procedimentos e notações convencionais.

Para Radford (2008), o processo de generalização passa, essencialmente, por três etapas: identificação de uma semelhança, ampliação dessa semelhança a todos os casos e elaboração de uma regra – expressão analítica (Figura 9).

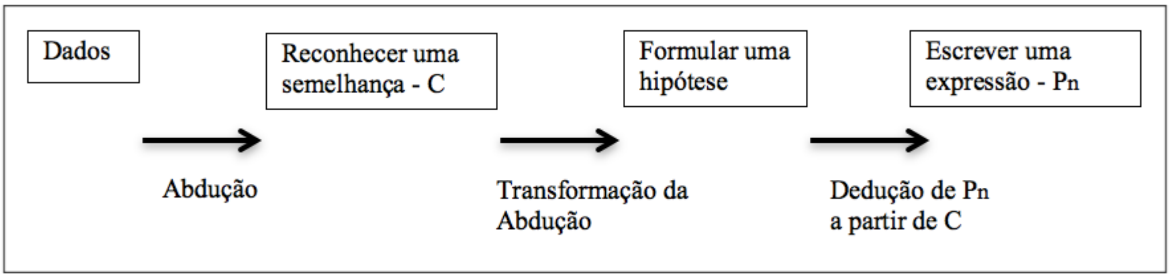


Figura 9: Processo de generalização (Radford, 2008).

A generalização envolve, como se observa na figura 10, a coordenação de duas ações interdependentes, a ação abdutiva-indutiva (na qual os alunos podem recorrer a diversas estratégias) e a ação simbólica, correspondendo esta última à tradução da ação anterior numa expressão algébrica (Rivera, 2010).

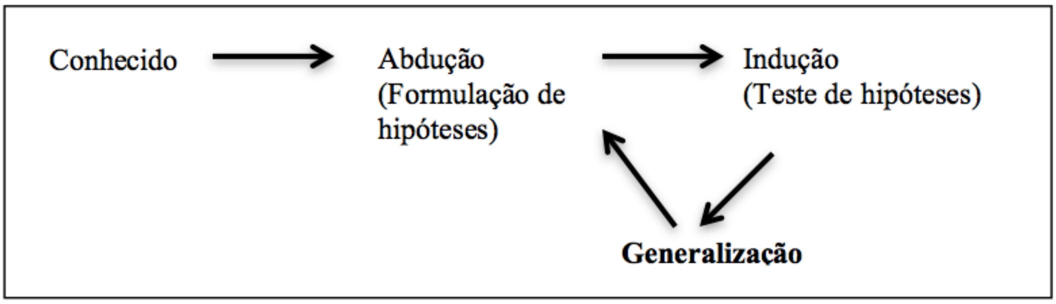


Figura 10: Ação abdutiva-indutiva (Rivera, 2010).

Para este autor, a abdução está no centro do processo de generalização porque corresponde à etapa onde os alunos começam a elaborar hipóteses sobre a situação apresentada, aproximando-se da generalização. Esta fase pode ser usada pelos alunos, por exemplo, para a determinação de termos de uma sequência, porque é onde os alunos começam a procurar uma regra plausível que explique os dados conhecidos e que possa ser usada para determinar dados desconhecidos. De seguida, os alunos testam as suas hipóteses – fase de indução – que pode dar origem a uma nova abdução ou confirmação da regra, emergindo, assim, a generalização. Neste processo matemático, a conjetura desempenha um papel determinante pois desencadeia atividade nos alunos que conduz à procura de uma regra.

As generalizações algébricas podem ser de sete tipos: *i)* padrão construtivo aditivo (*additive constructive standard*); *ii)* fora do padrão construtivo aditivo (*additive constructive nonstandard*); *iii)* padrão construtivo multiplicativo (*multiplicative constructive standard*); *iv)* fora do padrão construtivo multiplicativo (*multiplicative constructive nonstandard*); *v)* desconstrutivo (*deconstructive*); *vi)* processo auxiliar construtivo ou desconstrutivo (*auxiliary-driven constructive or deconstructive*); e *vii)* transformação baseada num processo construtivo ou desconstrutivo (*transformation-based constructive or deconstructive*) (Rivera, 2010). Nas generalizações que envolvem processos aditivos e multiplicativos, as unidades são vistas como partes que não se sobrepõem, sendo caracterizadas pela expressão algébrica que a define, isto é, nas generalizações do tipo fora do padrão, as expressões não surgem na forma simplificada. Na generalização do tipo *vi)*, as unidades são assumidas como partes de uma configuração maior de estrutura conhecida, que facilita o processo de generalização e consequente escrita da expressão algébrica. No último tipo de generalização, os alunos efetuam alterações na situação apresentada, de modo a transformá-la numa configuração que use estruturas conhecidas, aproximando-se do tipo de generalização anterior. Estas generalizações podem recorrer a esquemas aditivos ou multiplicativos, mas os multiplicativos têm vantagens, porque enfatizam o conceito de unidade que é fundamental na construção e análise de padrões.

Para Carraher, Martinez e Schliemann (2008), os alunos podem recorrer a raciocínios recursivos, focando-se na diferença $f(n)-f(n-1)$ ou $f(n)-n$ na análise da situação apresentada; ou a relações funcionais, onde identificam regularidades e relacionam, por exemplo, os termos com o número da figura, decompõem a figura e estabelecem relações ou relacionam diferentes dados da situação em exploração. É de salientar que os procedimentos que envolvem relações funcionais estão na mesma linha dos tipos de generalização *vi)* e *vii)* apresentados por Rivera (2010).

A generalização como uma forma de justificação é usado, com dificuldade, pelos alunos na resolução de problemas algébricos (Arzarello, 1998). Apesar de aprenderem a resolver problemas desta natureza, as suas dificuldades estão relacionadas, fundamentalmente, com a simbolização da expressão de relações gerais, já que neste processo usam símbolos que são entes abstratos que incorporam relações e estruturas. No entanto, os alunos aprendem a generalizar, a pensar sobre quantidades que variam, sobre propriedades das operações aritméticas e a analisar padrões (Carraher et al., 2008). A generalização, enquanto processo matemático que favorece uma compreensão global de uma determinada situação, constitui uma forma de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Simbolização

Apesar de a Álgebra ser caracterizada pelo seu grande simbolismo, é de notar que o uso de símbolos já aparece na Aritmética com a introdução dos algarismos e dos sinais de "=", "+",... Contudo, a Álgebra introduz novos símbolos como as letras e, por vezes, mudanças no significado dos símbolos "=" e "+". Enquanto na Aritmética o sinal de igual está relacionado, principalmente, com as operações (indica o resultado de uma determinada operação), na Álgebra esse sinal refere uma condição. Note-se também que, enquanto na Aritmética se pode simplificar a expressão $2 + 3$, em Álgebra não se pode simplificar a expressão $x + 2$. As letras trazem também algumas dificuldades aos alunos, porque podem representar diversos entes, como uma incógnita (designa um determinado número específico com o qual é possível operar diretamente e está fortemente ligada à resolução de equações); um número generalizado (pode indicar vários números); uma variável (traduz um conjunto de valores); quantidades variáveis (nas funções) (Driscoll, 1999); nomes (m e km em $1000m = 1km$); e parâmetros (m e b em $y = mx + b$) (Philipp, 1999). Esta diversidade de significados que as letras podem assumir justifica, na perspetiva de Rojano (2002), as dificuldades que os alunos manifestam na passagem da Aritmética para a Álgebra. Contudo, a autora acrescenta ainda a dificuldade que os alunos têm em *i)* interpretar as letras que surgem numa expressão; *ii)* dar sentido a uma expressão algébrica; e *iii)* passar informação de linguagem natural para linguagem algébrica.

Como forma de ultrapassar algumas das dificuldades dos alunos em Álgebra, emerge a ideia do desenvolvimento do sentido de símbolo. Este conceito começou a desenvolver-se a partir dos trabalhos em torno do desenvolvimento do sentido de número, por volta dos anos 80/90, e inclui a compreensão de que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis dependendo das situações em que são usados, concluindo sobre essas diferenças. O sentido de símbolo pressupõe, ainda, que os alunos sejam capazes de *i)* decidir quando devem utilizar, ou não, símbolos para exprimir relações, fazer generalizações ou demonstrações; *ii)* escolher representações simbólicas adequadas; e *iii)* manipular e interpretar adequadamente expressões algébricas (Arcavi, 2006). Para ajudar os alunos a desenvolver o sentido de símbolo, Driscoll (1999) refere que numa primeira fase se pode tirar partido das representações visuais, já que fazem mais sentido para eles, assim como das oportunidades que surgem na descrição de padrões (por exemplo, o professor pode desafiar os alunos a usar letras dizendo, *Para qualquer número n...*). É importante que os alunos usem diversos tipos de representação, mas que também sejam capazes de as interpretar e estabelecer relações entre elas. Os símbolos, como representações externas de objetos mentais, permitem a comunicação e a criação de poderosas ideias matemáticas (Drouhard & Teppo, 2004).

Para Kaput, Blanton e Moreno (2008), o processo de simbolização é dinâmico e interativo e pode ser representado pelo esquema da figura 11, onde o caminho para a simbolização é iniciado através da exploração de uma determinada situação (A). Essa situação vai conduzir os alunos à apresentação das suas ideias acerca da situação em estudo, recorrendo a diversas representações, como tabelas, esquemas e palavras, de modo a que fiquem acessíveis ao grande grupo, construindo-se assim descrições informais (B). Desse processo, interativo de análise e partilha de ideias, resulta a construção de uma nova conceptualização para as ideias de partida (A) que dependem, naturalmente, de B - A_B. Através dessas novas ideias, e do processo comunicativo que se gera em torno delas, há um refinamento das representações que conduzem a uma redefinição da conceptualização A, em função de C – A_c. A sequência continua até se atingirem representações convencionais que conduzem à simbolização.

É evidente nesse processo o papel determinante da comunicação matemática no desenvolvimento da capacidade de simbolização (Cobb, Yackel & McClain, 2012; Guerreiro et al., 2015). Assim, a criação de momentos onde os alunos tenham oportunidade de partilhar as suas ideias favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico (Johanning, 2004). Matos e Ponte (2009) referem, ainda, que o trabalho em torno de tarefas de exploração e investigação, conciliadas com a discussão em grande grupo, promove o desenvolvimento do significado da linguagem algébrica e contribui para a diversificação de estratégias para explorar situações envolvendo relações entre variáveis e para expressar generalizações usando linguagem convencional, em alunos do 8.º ano. Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008) também concluem que, através de uma abordagem de natureza exploratória, os alunos dos 6.º, 7.º e 8.º anos foram capazes de desenvolver estratégias informais e de usar, progressivamente, estratégias cada vez mais formalizadas na resolução de uma diversidade de problemas, formulando e representando generalizações.

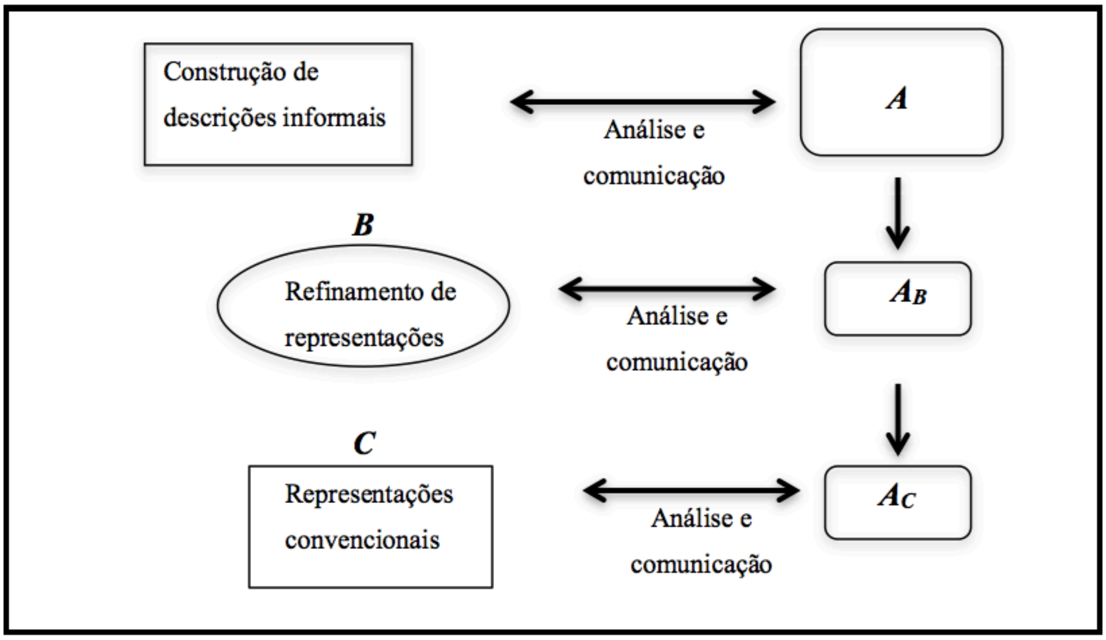


Figura 11: Processo de simbolização (Kaput et al., 2008).

O desenvolvimento do simbolismo em Álgebra está relacionado com o desenvolvimento do processo de resolução de problemas (Puig & Rojano, 2004). Nesta perspetiva, o simbolismo pode apresentar vantagens ao permitir aglutinar ideias, facilitando a compreensão e manipulação de informação, mas também desvantagens pelo grande formalismo que introduz. Esse formalismo pode tornar as ideias matemáticas incompreensíveis para os alunos, principalmente, quando a grande preocupação é a manipulação simbólica em vez da compreensão do significado dos símbolos. Para ajudar os alunos a desenvolver o seu sentido de símbolo, é fundamental que estes sejam capazes de escolher os símbolos mais adequados a cada situação (Arcavi, 2006; Chazan & Yerushalmy, 2003; Driscoll, 1999; Ponte et al., 2009).

A simbolização desempenha um papel importante no desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo, assim, fundamental que os alunos se envolvam em atividades de simbolização com compreensão.

Estudo das Sequências e regularidades, Funções e Equações

As orientações curriculares para o ensino da Matemática têm como grande objetivo para o tema da Álgebra o desenvolvimento de pensamento algébrico, para o qual contribui fortemente o estudo das sequências e regularidades, iniciado logo no 1.º ciclo do ensino básico. Contudo, a Álgebra só surge como tema independente no Programa de Matemática do Ensino Básico nos 2.º e 3.º ciclos, apesar de antes se começarem a estudar pequenas estruturas algébricas (logo no 1.º ciclo do ensino básico), ao estabelecerem-se "relações entre números e entre números e operações, e ainda no estudo de propriedades geométricas como a simetria" (ME, 2007, p. 7). Mais recentemente, o documento curricular *Aprendizagens Essenciais – Articulação com o Perfil dos alunos* (ME, 2018) considera como aprendizagem essencial da comunicação e raciocínio matemáticos que os alunos reconheçam e descrevam regularidades em sequências e em tabelas de números, explicando como são obtidas essas regularidades, formulem e testem conjeturas.

O Programa de Matemática de 2007 defende que, para o 2.º ciclo do ensino básico, o trabalho iniciado no ciclo anterior seja alargado com o "estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade direta como igualdade entre duas razões" (ME, 2007, p. 7), com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, assim como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas (ME, 2018).

No 3.º ciclo do ensino básico, os alunos prosseguem no desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico, ampliando e aprofundando o estudo das relações matemáticas (ME, 2018). Ou seja, "institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos" (ME, 2007, p. 7), como refere o Programa de Matemática de 2007. O conceito de proporcionalidade direta, estudado no 2.º ciclo do ensino básico, é agora alargado ao conceito de função, enquanto função linear.

A atividade do aluno nesse tema desenvolve-se através de tarefas de natureza mais aberta, como as explorações e as investigações, em contextos matemáticos e não matemáticos, envolvendo atividades de simbolização e de modelação.

Sequências e regularidades

O trabalho em torno de sequências é uma forma produtiva de introduzir a Álgebra, já que ao longo do seu percurso escolar, desde a Educação de Infância, os alunos têm contacto com diversos tipos de sequências (pictóricas e numéricas, crescentes e repetitivas, finitas e infinitas), sendo desejável que as reconheçam e as descrevam (Driscoll, 1999).

Neste tópico matemático, o trabalho dos alunos deve contemplar, para além da identificação da lei de formação, a determinação de termos (próximos ou distantes) de uma sequência, a continuação de uma sequência a partir de alguns termos dados, a descrição de sequências e a exploração de sequências apresentadas pelo seu termo geral, com vista a "aprofundar o estudo de relações algébricas e sua simbolização, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica" (ME, 2007, p. 55), como defendido pelo Programa de Matemática de 2007. Sendo assim, é objetivo de aprendizagem essencial que através de situações e contextos diversificados, recorrendo a materiais variados e a tecnologia, que os alunos resolvam tarefas que apelem à resolução de problemas, ao raciocínio e à comunicação matemáticos, de forma a que sejam capazes de: "reconhecer regularidades e determinar uma lei de formação de uma sequência numérica ou não numérica e uma expressão algébrica que a representa" (ME, 2018, p. 11).

O trabalho com expressões algébricas é iniciado neste tópico matemático e aprofundado no estudo das funções e das equações. Neste primeiro contacto com as expressões algébricas, os alunos devem compreender os diversos usos dos símbolos, nomeadamente, de variável, constante e parâmetro e simplificar expressões algébricas. É, ainda, importante que os alunos reconheçam a noção de equivalência presente numa expressão algébrica, representada pelo sinal de igual, apesar de não designar a relação de igualdade estudada na Aritmética, dado que pode não existir uma coincidência total entre os dois objetos, mas apenas uma equivalência entre expressões. Essa compreensão do sinal de igual nem sempre é fácil para os alunos, originando dificuldades no trabalho nesse assunto (Hercovics & Kieran, 1999; Kieran, 1992; Ponte et al., 2009). Outra das dificuldades dos alunos neste tópico está relacionada com a identificação da unidade nas sequências repetitivas (Threlfall, 1999). Este autor considera que o trabalho com sequências repetitivas favorece o trabalho com símbolos e serve de contexto para a generalização, sendo, portanto, fundamental proporcionar tarefas deste género aos alunos, desde os primeiros anos e continuando nos seguintes, já que contribui para a compreensão de relações algébricas. Matos e colegas (2008) também consideram que o estudo de regularidades, a partir de uma abordagem de ensino exploratória, promove o desenvolvimento da linguagem algébrica.

A passagem da linguagem recursiva para a linguagem funcional na descrição de sequências é outra das dificuldades que os alunos enfrentam neste tópico, sendo o momento de discussão de ideias importante para a clarificação do significado de expressões algébricas e para a tomada de consciência das vantagens do uso que essa linguagem pode ter para expressar generalizações e resolver problemas (Matos & Ponte, 2009). Contudo, esta passagem para a linguagem algébrica é fundamental, na medida em que o recurso à linguagem recursiva pode impedir o desenvolvimento do pensamento funcional, porque não enfatiza relações de correspondência (Blanton & Kaput, 2011) e do pensamento de covariação sobre a relação entre o conjunto de dados para encontrar a lei de formação (Moss & McNab, 2011). O uso da linguagem recursiva compromete o trabalho dos alunos nos tópicos Funções e Equações, na medida em que as relações estabelecidas nestes tópicos pressupõem representações mais globais, apesar de ter vantagens para o estudo das sequências, principalmente na identificação do termo seguinte numa sequência.

A justificação para as generalizações que estabelecem é outra das dificuldades que os alunos revelam no estudo das sequências (Baek, 2008; Driscoll, 1999; Ponte et al., 2009). A generalização envolve dois aspetos essenciais: o aspeto globalizante (relacionado com o que funciona sempre numa relação funcional, que implica a produção de argumentos convincentes e inclui a justificação de cada passo) e o aspeto de ampliação (diz respeito a considerar direções que um resultado algébrico sugere) (Driscoll, 1999). Uma forma de ajudar os alunos a desenvolverem a sua capacidade de generalização é criar momentos onde os alunos sejam incentivados a responder a questões como "*A regra funciona para todos os casos*?", "*Temos informação suficiente para prever o que vai acontecer*?", "*Se mudar os números, o que se mantém*? *O que se altera*?". A pertinência destes ambientes de ensino justificam-se, na medida em que é fundamental que os alunos desenvolvam a capacidade de abstração e de generalização, compreendam e construam argumentos matemáticos e raciocínios lógicos, bem como, exprimam, oralmente e por escrito, as suas ideias matemáticas, com rigor e precisão, para explicar e justificar os seus raciocínios, procedimentos e conclusões que estabelecem, utilizando vocabulário e linguagem próprios da Matemática (ME, 2018).

O uso de tabelas e de materiais manipuláveis ajuda os alunos na análise de sequências, na identificação de regularidades, na procura de regras e na generalização dessas regras (Warren & Cooper, 2008). Os momentos de discussão, onde os alunos têm oportunidade de apresentar e defender as suas ideias, também contribuem para o processo de generalização. O trabalho com a folha de cálculo também auxilia os alunos a estabelecer relações entre variáveis dadas por sequências numéricas e a usar fórmulas, favorecendo uma melhor compreensão entre a linguagem simbólica e a algébrica (Nobre, Amado, Carreira, & Ponte, 2011).

Na exploração de sequências, os alunos podem recorrer a diversas estratégias, por exemplo, à estratégia de representação e contagem (os alunos representam todos os termos da sequência até ao termo pedido, contando de seguida os elementos que a compõem); à estratégia aditiva (os alunos comparam termos consecutivos de modo a identificarem alterações de um termo para o outro); à estratégia do objeto inteiro (o aluno fixa-se num determinado termo e a partir desse termo encontra termos de ordem múltipla à do considerado) e à estratégia da decomposição de termos (o aluno estabelece uma relação entre o termo de uma dada sequência e a sua ordem nessa sequência) (Ponte et al., 2009). É de salientar que a estratégia aditiva recorre, essencialmente, a raciocínios recursivos. Essa estratégia, à semelhança da estratégia do objeto inteiro, conduz muitas vezes os alunos a generalizações incorretas e à determinação errada de termos. É também importante que os alunos compreendam que a estratégia do objeto inteiro só pode ser aplicada em casos em que há proporcionalidade direta. A última estratégia é favorável ao aparecimento de diferentes expressões algébricas para a identificação da lei de formação (Ponte et al., 2009).

No caso particular das sequências pictóricas, o termo geral pode ser determinado através da: *i)* decomposição dos termos (os alunos procuram estabelecer relações entre a ordem do termo e o número de elementos que compõem o termo, o que promove o desenvolvimento da capacidade de generalização e do sentido de símbolo, bem como do aparecimento de diversas expressões para representar a mesma lei de formação, contribuindo, assim, para uma melhor compreensão da manipulação simbólica); *ii)* análise da sequência a partir do seu sentido de número e *iii)* determinação das diferenças entre termos (os alunos analisam termos de ordem consecutiva com vista a identificar as alterações de um termo para o outro, podendo determinar diferenças entre termos consecutivos até serem constantes) (Ponte et al., 2009). Ao analisarem uma sequência pictórica, os alunos identificam regularidades que, posteriormente, podem mobilizar na identificação da sequência numérica que lhe está subjacente e para a generalização, a partir da análise das propriedades figurativas.

Na simplificação de expressões algébricas, Demby (1997) identificou sete tipos de procedimentos usados por alunos dos 7.º e 8.º anos: *i)* automatização (*automatization*) – mobilização de conhecimentos prévios sobre as operações envolvidas para responderem ao solicitado; *ii)* fórmulas (*formulas*) – utilização de fórmulas já conhecidas; *iii)* adivinhar-substituir (*guessing-substituting*) – verificação de um número que pensam ser o resultado; *iv)* modificação preparatória (*preparatory modification of the expression*) – alteração na expressão dada de modo a simplificá-la; *v*) concretização (*concretization*) – simplificação da expressão a partir de conhecimentos anteriores; *vi*) regras (*rules*) – verbalização consciente da regra e procedimento adotado e *vii*) quase-regras (*quasi-rules*) – formulação de generalizações erradas.

O tópico Sequências e regularidades percorre todo o ensino básico com uma crescente formalização, no qual se pretende que os alunos procurem regularidades e estabeleçam generalizações. O trabalho com sequências, desde os primeiros anos, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Driscoll, 1999), porque a "análise de sequências permite aos alunos progredir de raciocínios recursivos para raciocínios envolvendo relações funcionais" (Ponte et al., 2009, p. 41) e constitui, segundo o NCTM (2007), uma base para a compreensão do conceito de função.

O estudo de sequências e regularidades contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico ao favorecer a simbolização, a compreensão da linguagem algébrica e o trabalho com relações.

Funções

Apesar de os alunos contactarem, desde os primeiros anos da Educação de Infância, com a noção intuitiva de função através da exploração de sequências e de situações de organização e tratamento de dados, esse conceito só é formalizado no 3.º ciclo do ensino básico, onde os alunos aprendem o que é uma função, como se representa, e como se calculam objetos e imagens. Neste ciclo de ensino, "uma função é estudada essencialmente como relação entre duas variáveis embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos" (ME, 2007, p. 56), como a apresenta o Programa de Matemática de 2007. No caso particular de análise de variação entre as variáveis independente e dependente, a função é encarada como uma covariação (Slavit, 1997). É considerado aprendizagem essencial neste tópico matemático que os alunos reconheçam uma função em diversas representações e usem funções para representar e analisar situações, em contextos matemáticos e não matemáticos, bem como representem e interpretem graficamente as funções linear e afim, relacionando a representação gráfica com a algébrica (ME, 2018).

As orientações curriculares estabelecem que os alunos contactem com diferentes tipos de funções: a função afim, que é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e a função linear, caso particular da função afim, em que $b = 0$. No caso em que $a = 0$ tem-se uma função constante. Nas funções afins é importante ter em atenção o modo como são representadas, já que a mesma função pode representar uma relação entre variáveis de forma explícita ou implícita. Isto é, enquanto a função $25x + 0{,}5y = 100$ não traduz uma relação direta de dependência entre as variáveis x e y, que representam números desconhecidos, a mesma função representada na forma $y = 200 - 50x$ evidencia uma relação de dependência entre a variável dependente e a variável independente (Chazan & Yerushalmy, 2003). Na primeira situação, os alunos não reconhecem a relação apresentada como uma função.

Neste ciclo de ensino, são, ainda estudadas as funções de proporcionalidade inversa, funções do tipo $f(x) = \frac{a}{x}$, com $x \neq 0$, e a quadrática, função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, embora se abordem somente as funções do tipo $f(x) = ax^2$, com a um número real não nulo.

Segundo o Programa de Matemática de 2007, no estudo das funções, os alunos devem recorrer a diversas representações, como a algébrica, a gráfica e a tabular, na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações (ME, 2007), já que uma expressão de uma correspondência entre dois conjuntos, formulada em qualquer um desses tipos de linguagem, constitui a generalização de uma relação entre elementos de dois conjuntos, o domínio e o contradomínio, sendo importante que os alunos representem explicitamente as variáveis independente e dependente (Carraher et al., 2008). É também fundamental que sejam capazes de relacionar as diferentes representações e de as usar na construção de significado para várias ideias matemáticas, comunicando-as posteriormente (Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007).

As dificuldades dos alunos neste tópico matemático estão relacionadas com a terminologia, com o uso das letras x, y, $f(x)$, com o significado de $f(x) = y$ e com a interpretação de informação apresentada de diversas formas (Elia et al., 2007; Ponte et al., 2009). No que diz respeito à representação gráfica, as dificuldades dos alunos estão relacionadas com a diversidade do conceito de função dependendo da situação em que está a ser utilizada, como relação, transformação, aplicação e com as variadas formas de representar uma função (algébrica, numérica, gráfica) e relações que se podem estabelecer entre elas, que têm especificidades próprias, por exemplo, as características e significado da linguagem esquemática (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998). Alunos do 11.º ano revelaram dificuldades em definir função e em resolver problemas com funções que envolviam o estabelecimento de relações entre diferentes tipos de representações (Elia et al., 2007).

Outra das dificuldades dos alunos está relacionada com a abstração do conceito de função, já que existem funções que não podem ser traduzidas por expressões algébricas, como a correspondência que a cada indivíduo associa o número de calçado (admitindo que a cada participante corresponde um único número de calçado) (Carraher et al., 2008). Como forma de ajudar os alunos a compreenderem melhor o conceito de função, Smith (2003) identifica dois modos distintos de analisar uma função: *i)* compreender a relação entre cada valor da variável *x* e o correspondente valor da variável *y*, que pode permitir a escrita de uma expressão que traduz essa relação; e *ii)* analisar o modo como a variação de valores de uma variável produz variação nos valores de outra.

O conceito de função é de extrema importância no ensino da Matemática, porque permite relacionar duas quantidades (Elia et al., 2007) e tira partido do trabalho com padrões, porque inclui a compreensão do modo como duas variáveis se relacionam e pressupõe a identificação de padrões (Matos & Ponte, 2009).

Uma abordagem baseada nas funções enfatiza a interpretação das letras como variáveis em vez de incógnitas (Chazan & Yerushalmy, 2003), onde os alunos são encorajados a pensar sobre relações entre variáveis e não apenas sobre operações com números específicos (Carraher et al., 2008).

O trabalho com funções, associado, em particular, à modelação de situações reais, permite estudar diversos tipos de relações que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Equações

Uma equação é, habitualmente, definida como “uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos” (Ponte et al., 2009, p. 93). No entanto, esta definição pode colocar dificuldades de compreensão aos alunos, porque podem olhar para $2 + 3 = 5$ como uma equação por ser uma igualdade e esquecerem-se que não há valores desconhecidos. Por vezes, acrescenta-se à definição anterior a restrição de que é satisfeita para certos valores da incógnita, o que também pode trazer problemas, pois exclui as equações impossíveis e as possíveis indeterminadas.

No trabalho neste tópico matemático, os alunos devem ser capazes de resolver equações conhecendo os princípios válidos a que podem recorrer, como o princípio da equivalência (que passou a ser enunciado pela regra da transposição – passar um termo de um membro para o outro, trocando-lhe o sinal), mas, segundo o Programa de Matemática de 2007, num primeiro momento podem desenvolver estratégias informais que os podem ajudar a compreender melhor as consequentes regras formais (ME, 2007). Os alunos também devem concluir que na resolução de equações podem multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero, assim como substituir uma equação por outra equivalente. O Programa de Matemática de 2007, frisa que é importante que os alunos usem essas regras com compreensão e não apenas como um procedimento, fazendo uma transição progressiva da linguagem natural para a algébrica (ME, 2007).

Na passagem da resolução de equações com uma incógnita para a resolução de equações com duas incógnitas, é fundamental que os alunos repensem a noção de igualdade algébrica e de incógnita matemática. É igualmente importante que interpretem as letras nos contextos apresentados (Filloy, Rojano, & Solares, 2010) e tenham em atenção que as soluções são pares ordenados (Chazan & Yerushalmy, 2003).

O trabalho com equações ao introduzir terminologia nova como “termo”, “membro”, “equação equivalente” e “solução” levanta, por vezes, algumas dificuldades aos alunos. Contudo, para Kieran (1992), muitas das dificuldades dos alunos no trabalho com equações estão relacionadas com a má interpretação do significado do sinal de igual, já que os alunos estão habituados a olhar para esse sinal como expressão do resultado de uma operação e não como uma identidade. Para essa autora, é importante que os alunos alarguem o seu conceito de igualdade, incluindo diversas operações em ambos os membros, de modo a compreenderem melhor as equações.

Nessa linha, Hercovics e Kieran (1999) reforçam essa ideia e mencionam que quando se pede aos alunos para darem exemplos com: *i)* a mesma operação em ambos os membros, os alunos recorrem, normalmente, à propriedade comutativa; *ii)* operações diferentes em cada membro, os alunos apresentam usualmente $5 + 5 = 2\times5$; e *iii)* mais do que uma operação em cada membro, os alunos exibem $3 + 5 + 4 = 12 - 4 + 4$.

Ponte e colegas (2009) referem, também, como dificuldades dos alunos neste tópico, a má interpretação do sinal de igual, mas acrescentam ainda as seguintes: a adição de termos que não são semelhantes ou adição incorreta desses termos; interpretação errada do sinal de "$+$"; interpretação incorreta de monómios do 1.º grau (por exemplo, interpretar $4x$ como $4 + x$, porque $3\frac{1}{2}$ é $3 + \frac{1}{2}$); uso de parênteses de forma incorreta; não saber como começar a resolver uma equação; transposição incorreta de termos; redistribuição $(-2x + 5 = 8 \Leftrightarrow -2x + 5 - 5 = 8 + 5)$; eliminação $(3x - 3 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2x - 4)$ e conclusão incorreta da resolução de uma equação $(-x = 4)$.

É objetivo de aprendizagem essencial neste tópico, para este ciclo de ensino, que os alunos resolvam problemas envolvendo equações e sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas, em contextos matemáticos e não matemáticos, concebendo e aplicando estratégias de resolução e avaliando a plausibilidade dos resultados obtidos. No caso dos sistemas de equações, os alunos devem, ainda, interpretar graficamente a solução obtida (ME, 2018). Contudo, a este respeito, a investigação mostra que os alunos quando confrontados com problemas implicando equações lineares da forma $ax \pm b = cx \pm d$ conseguem resolver as equações com uma única solução, usando manipulação algébrica ou gráfica, mas revelam dificuldades na interpretação dos resultados obtidos por manipulação algébrica nas equações que conduzem a condições impossíveis ou universais (Huntley, Marcus, Kahan, & Miller, 2007). É também de salientar que os alunos revelam dificuldades na tradução de situações de linguagem natural para linguagem algébrica, sob a forma de equações, porque não leem com atenção as situações e essas podem não lhes ser familiares (Cuoco, 2008).

Na resolução de equações, os alunos podem recorrer a diversos métodos como: *i)* usar factos numéricos conhecidos (por exemplo, para resolver $5 + x = 8$ os alunos podem recorrer ao facto conhecido que $5 + 3 = 8$; *ii)* usar técnicas de cálculo (contar a partir de certa ordem até chegar ao número desejado); *iii) cover-up* (para resolver a equação $2x + 9 = 5x$ os alunos podem pensar no número que multiplicado por 3 dá 9, já que $2x + 3x = 5x$; *iv)* andar para trás (fazer no segundo membro da equação as operações inversas); *v)* tentativa e erro (experimentar valores até obter proposições verdadeiras); *vi)* transposição; e *vii)* efetuar a mesma operação em ambos os membros (Kieran, 1992). Segundo a autora, os dois últimos métodos são os mais formais. Linchevski e Herscovics (1996) acrescentam, ainda, a estratégia decomposição de termos combinada com o anulamento de termos idênticos, como um procedimento para a resolução de equações do 1.º grau com uma incógnita em ambos os membros. No caso particular da resolução de equações do tipo $x + (x + a) + (x + b) = c$ ou $ax + bx + cx = d$, os alunos recorrem, numa fase inicial, a estratégias informais como adivinhar um número e verificar se satisfaz as condições pedidas (Johanning, 2004).

Dadas as dificuldades dos alunos neste tópico matemático, professores australianos, estudados por MacGregor (1998), para tornarem o conceito de equação compreensível, introduzem-no através de metáforas: *i)* história sobre um número, por exemplo, uma equação pode ser interpretada como uma história acerca de um número, que é normalmente representada por um diagrama, onde os alunos não têm que trabalhar com incógnitas, mas apenas com cálculos numéricos; *ii)* máquina, onde a equação também representa algo que acontece a um número; *iii)* receita, relaciona aprendizagens anteriores dos alunos com o conceito de equação; e *iv)* balança, onde os termos algébricos e os numerais são representados como objetos nos pratos de uma balança e onde os alunos encontram a solução analisando as operações que podem fazer, de modo a que a balança fique em equilíbrio. Essas metáforas, apesar de introduzirem o conceito de equação de uma forma compreensível, apresentam algumas limitações, principalmente as metáforas *i*, *ii* e *iii*, porque encaram o sinal de igual como o resultado de uma expressão e essa é uma das dificuldades dos alunos que se pretende combater. A metáfora *iv* não faz sentido no contexto dos números negativos, contudo, providencia um contexto que ajuda a compreender as etapas para a resolução de uma equação, como adicionar o simétrico para anular uma determinada quantidade, continuando a manter o equilíbrio. Neste sentido, é importante que os alunos conheçam as limitações de cada metáfora e as aplicações de cada uma, de forma a selecionarem as mais vantajosas ao desenvolvimento do pensamento abstrato (MacGregor, 1998).

O trabalho com equações apoia o desenvolvimento do pensamento algébrico ao contribuir para o trabalho com diferentes tipos de representações e linguagens, como a passagem de linguagem natural para matemática, favorecendo a generalização de relações matemáticas e a manipulação algébrica. A transição entre linguagens natural e matemática promove o desenvolvimento da simbolização.

Síntese

A Álgebra é, muitas vezes, identificada como manipulação simbólica, associada à resolução de equações e à simplificação de expressões, onde os símbolos e os procedimentos algébricos desempenham um papel determinante. Contudo, esta visão está ultrapassada, já que o trabalho neste tema pressupõe também a compreensão de relações entre quantidades, incluindo funções, de representações diversificadas dessas relações, usando linguagem algébrica e da análise de variação.

O estudo das sequências e regularidades, funções e equações contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico ao utilizar linguagem específica, ao relacionar e generalizar ideias, onde é importante compreender como uma suposição se transforma numa hipótese e como essa hipótese vai dar origem a uma expressão algébrica. O trabalho em cada um desses tópicos matemáticos contribui para a compreensão dos restantes. As funções são uma extensão das sequências e regularidades ao conjunto $\mathbb{R}$ e as equações permitem, por exemplo, verificar se determinado elemento é ou não termo de uma sequência, assim como calcular objetos e imagens, no caso das funções. Os gráficos dão uma imagem visual da relação em estudo, enquanto as equações fornecem descrições condensadas dessas relações, que podem ser representadas de diversas formas, e adequadamente interpretadas, evidenciam a equivalência entre expressões algébricas.

No trabalho nestes tópicos, é fundamental o modo como cada aluno identifica a unidade e a mobiliza, podendo sobressair o pensamento relacional na escrita e manipulação de expressões algébricas, na resolução de equações e na justificação do funcionamento de determinadas regras, ao fazerem uso das propriedades das operações.

O ensino da Álgebra com compreensão, em particular dos tópicos Sequências e regularidades, Funções e Equações, pode tirar partido de uma cultura de sala de aula que promova o trabalho dos alunos com tarefas significativas e posterior apresentação e discussão de resultados. É nessa partilha de ideias que são negociados significados e aprofundada a linguagem algébrica.

CAPÍTULO V

Metodologia de investigação

Neste capítulo, apresento as opções metodológicas e o dispositivo de estudo, que se baseia no trabalho colaborativo com três professores do 3.º ciclo do ensino básico, depois de discutir o conceito de colaboração profissional. Refiro, também, os principais critérios que levaram à escolha dos participantes do estudo, descrevo os instrumentos de recolha de dados e caracterizo o processo de análise de dados.

Opções metodológicas

Este estudo visa compreender como professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico, num contexto de trabalho colaborativo, desenvolvem o seu conhecimento didático e as suas práticas letivas na preparação e dinamização de discussões matemáticas coletivas no ensino da Álgebra. Por isso, em termos metodológicos, o estudo insere-se no paradigma interpretativo, já que se está interessado no significado que os professores atribuem às ações que desenvolvem, aos seus pensamentos e também aos significados que os professores e os alunos constroem no curso da sua aprendizagem (Erickson, 1986), e numa abordagem qualitativa, porque, mais do que produtos se valorizam processos em ambiente natural (Bogdan & Biklen, 1994; Lüdke & André, 1986). Este estudo apresenta as cinco características da investigação qualitativa defendidas por Bogdan e Biklen (1994), já que: *i)* a fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal, pois a investigadora frequentou as escolas e as salas de aula dos professores para compreender melhor as suas ações quando observados em ambiente natural; *ii)* é descritivo, na medida em que os dados recolhidos são em forma de palavras e imagens e não de números; *iii)* a investigadora esteve preocupada com o processo (como os professores construíam e reconstruíam o seu conhecimento sobre preparar e dinamizar discussões coletivas) e não com os resultados ou produtos; *iv)* a investigadora analisou os dados de forma indutiva, isto é, não recolheu dados para confirmar hipóteses construídas previamente, mas antes para construir um modelo à medida que analisa os dados; e *v)* a investigadora esteve sempre preocupada com o significado que os professores atribuíram às suas ações, optando por mostrar vídeos com passagens das suas aulas para comparar interpretações e compreender opções tomadas na dinamização da discussão coletiva em sala de aula, face à preparação feita da discussão.

A modalidade de estudo escolhida é o estudo de caso, uma vez que se pretende estudar detalhadamente um conjunto limitado de professores – três professores do 3.º ciclo do ensino básico – a lecionar no mesmo Agrupamento de Escolas, incidindo assim numa identidade bem definida e com o propósito de se conhecer aprofundadamente a realidade do ponto de vista dos participantes, enfatizando-se o "como" e o "porquê" (Ponte, 2006). Isto é, como os professores mobilizam e desenvolvem o seu conhecimento didático na preparação e dinamização de discussões matemáticas coletivas, num contexto de trabalho colaborativo. Num estudo de caso não se pretende atuar sobre a situação para a modificar, mas compreendê-la tal como ela é (Ponte, 2006). Assim sendo, na perspetiva deste autor, um estudo de caso é descritivo e analítico, na medida em que procura descrever o que observa e interrogar a situação, confrontando-a com outras ou com a teoria existente. Especificamente, neste trabalho, pretendeu-se compreender como este grupo de três professores preparavam e dinamizavam discussões coletivas com tarefas algébricas. Um estudo de caso também se justifica quando existe pouco controlo sobre a situação em estudo (Yin, 1994), como foi o caso deste estudo. Embora a discussão fosse preparada previamente com os três professores, a forma como cada um a dinamizava em sala de aula era imprevisível, mesmo que apoiada na preparação realizada. A opção pelo estudo de caso justifica-se, na justa medida em que se pretende evidenciar as particularidades de cada professor na preparação e dinamização da discussão coletiva.

Através destes estudos de caso múltiplos – vários estudos de caso de certa forma comparáveis (Ponte, 2006) – pretendeu-se compreender as características particulares do conhecimento e ações dos três professores na promoção e organização das interações entre os alunos nas discussões matemáticas, no apoio à negociação de significados e à construção de conhecimento algébrico. Estes estudos de caso múltiplos têm como propósito conhecer melhor a diversidade de realidades existentes dentro do grupo de três professores (Ponte, 2006), já que cada professor possui um determinado conhecimento que influencia a sua atuação em sala de aula. O estudo destes casos contribui para um conhecimento mais aprofundado sobre os desafios de dinamizar discussões coletivas em sala de aula de Matemática e não para apresentar características gerais de uma população, ou para generalizar.

Os casos num estudo de caso múltiplo podem ser confirmatórios, quando se verificam repetições do mesmo fenómeno; contrastantes, quando um caso representa um sucesso e outro um insucesso; e teoricamente diversos, quando um dos casos é, por exemplo, de uma escola básica e o outro de uma escola secundária (Yin, 2004). Neste estudo, os casos são encarados como teoricamente diversos, já que os três professores têm percursos profissionais bastante distintos com possíveis implicações na forma como conduzem discussões coletivas. Um dos professores nunca participou em projetos e tem dedicado, até ao momento deste estudo, a sua vida profissional exclusivamente à lecionação. Já os outros dois, são professores que têm apostado de forma diferente na sua profissão, participando em projetos de diversa natureza.

Contexto colaborativo do estudo

Para a realização deste estudo criou-se um contexto colaborativo envolvendo os três professores escolhidos e eu própria. Nesta secção, começo por discutir o conceito de colaboração entre professores e depois descrevo e justifico o dispositivo do estudo.

Colaboração

O termo colaboração é usado no dia a dia como sinónimo de trabalhar em conjunto ou cooperar. Contudo, é importante frisar que enquanto o termo colaborar deriva de trabalhar (*laborare*) – que pressupõe o desenvolvimento de uma determinada atividade com vista a atingir um certo objetivo, o termo cooperar deriva de operar (*operare*) – que supõe a realização de uma determinada ação com base num plano previamente definido. No entanto, ambas incluem o prefixo (co) que significa ação conjunta, pressupondo, assim, o envolvimento de diversos sujeitos (Boavida & Ponte, 2002).

Para Hargreaves (1998), o conceito de colaboração como sinónimo de colegialidade, pode assumir diversas formas como ensino em equipa, planificação em colaboração, treino com pares, diálogo profissional e investigação-ação. Para este autor, a colaboração é um dos paradigmas mais prometedores que aparece na idade pós-moderna, enquanto "princípio orientador e integrador da ação, de planificação, da cultura, do desenvolvimento, da organização e da investigação" (Hargreaves, 1998, p. 277).

Já Goulet, Krentz e Christiansen (2003) encaram a colaboração como uma forma especial de reunir, de pensar e de atuar que amadurece com o tempo, a partir dos contributos dos participantes, quando estes se envolvem em processos de partilha, de colegialidade e de cooperação e pressupõe trabalhar em conjunto para atingir algo em comum. Para estes autores, o melhor da partilha e da colegialidade converge na cooperação, onde todos trabalham para o mesmo fim.

Na prática docente, a colaboração é uma estratégia de trabalho que apoia a prática profissional na resolução de problemas didáticos do dia a dia, favorecendo o aprofundamento do conhecimento didático, o desenvolvimento de práticas profissionais, a valorização de experiências e do conhecimento de cada um (Menezes & Ponte, 2009). Neste sentido, Hargreaves (1998) refere que a colaboração é uma estratégia poderosa de desenvolvimento profissional, na medida em que através dela aprendem uns com os outros, partilhando e desenvolvendo competências; e uma forma de implementar mudanças curriculares. Ponte, Segurado e Oliveira (2003), destacam a colaboração como uma metodologia eficaz para estudar problemas que dificilmente poderiam ser estudados de outra forma, devido à sua complexidade e, também, como meio de promover o desenvolvimento pessoal e profissional dos atores. No mesmo sentido, Hargreaves (1998) encara a colaboração como uma forma de ajudar os professores a trabalharem em conjunto com vista a atingirem determinados objetivos, ou seja, como uma forma de cultura docente em contraponto com o individualismo e a colegialidade artificial.

As relações de colegialidade artificial são reguladas administrativamente (não partem da iniciativa dos professores, mas são impostas por outros), compulsivas (constituem uma obrigação), orientadas para a implementação (resultam na aplicação de procedimentos), fixas no tempo e no espaço (ocorrem em lugares e tempos estipulados) e previsíveis (produzem resultados previsíveis) (Hargreaves, 1998). Já as relações de colaboração são espontâneas (partem dos atores), voluntárias (é reconhecido o seu valor pelos participantes), orientadas para o desenvolvimento (os atores trabalham em conjunto para atingirem objetivos que definiram), difundidas no tempo e no espaço e imprevisíveis (os resultados não são previsíveis à partida). Para Goulet e colegas (2003), só as relações de colaboração genuínas trazem ganhos para o desenvolvimento e transformação da educação. Para estes autores, a ideia de transformação está associada à reflexão, que é uma característica marcante das relações de colaboração, como referem Menezes e Ponte (2009). Neste sentido, a colaboração pode proporcionar a criação de espaços que conduzam à transformação de práticas. Contudo, Ponte e Santos (1998) salientam que a colaboração nem sempre se traduz na mudança de conceções e de práticas. Para que ocorra essa mudança, é preciso que os professores se mostrem recetivos à experimentação de novas ideias, que podem ser aperfeiçoadas na prática.

A colaboração terá que ser encarada como um processo dinâmico e interativo entre a forma como os atores estabelecem e mantêm o relacionamento, como trabalham em conjunto para atingirem os objetivos e no modo como os concretizam (Goulet et al., 2003). Neste sentido, Boavida e Ponte (2002) referem que a colaboração é um processo emergente caracterizado pela imprevisibilidade, porque ao ser dinâmico, criativo e mutável não pode ser planificado do princípio ao fim, apoiando-se na negociação conjunta (de objetivos, prioridades, significados, modos de trabalho) e tomada de decisões.

As relações de colaboração pressupõem trabalho conjunto entre os diversos atores, não numa relação hierárquica, mas numa relação de confiança, respeito e de equidade, onde se ouvem uns aos outros, valorizando-se os contributos de cada um, de forma a atingirem objetivos que a todos beneficiem (Boavida & Ponte, 2002; Goulet et al., 2003). Nestas relações, os participantes partilham objetivos comuns, apesar de poderem ter objetivos imediatos diferentes e de terem a possibilidade de desempenhar também papéis diferentes, nos quais se sintam confortáveis (Ponte et al., 2003), para que melhor se atinjam os objetivos definidos. Isto não significa que uns ficam com os papéis mais interessantes e outros com os menos, mas que ficam com os papéis que permitam rentabilizar os seus interesses e competências (Ponte, 2005b). As formas de trabalho e de relacionamento também devem ser favoráveis à realização do trabalho conjunto, onde todos têm algo a dar e a receber, não tendo que ser necessariamente igual o que se dá e o que se recebe, já que o essencial é que todos interajam, de modo a atingirem o objetivo comum. Num trabalho desta natureza, é importante que haja: *i)* confiança, para que todos se sintam à vontade em interagir; *ii)* diálogo, para que se proporcionem trocas de ideias e construção de novos entendimentos; *iii)* disponibilidade para ouvir os outros com atenção, valorizando os seus contributos e experiências; e *iv)* sentimento de pertença ao grupo.

A colaboração pode ser encarada pelos professores de diversas formas, primeiro como um meio de apoio à sua prática profissional, na medida em que os ajuda a resolver problemas da vida profissional, depois como uma forma de realizar tarefas que seriam complexas de realizar sozinhos e como um contexto de desenvolvimento profissional, particularmente, de aprofundamento do conhecimento didático (Menezes & Ponte, 2009).

A colaboração profissional entre os professores pode assumir diversos padrões: ajuda e apoio, partilha e copropriedade (Menezes & Ponte, 2009). O padrão ajuda e apoio é caracterizado pela partilha de experiências individuais que procuram o contributo dos outros, não valorizando as suas próprias ideias para o desenvolvimento do grupo. Este padrão pode ser justificado pela insegurança dos participantes e pelo seu conhecimento didático, considerado menos forte. O padrão partilha encontra-se a meio caminho entre o trabalho individual e o de grupo, ou seja, aquele que exige um maior compromisso e tempo. O terceiro padrão é caracterizado pelo envolvimento dos participantes numa relação de igual para igual no trabalho de grupo, implicando maior compromisso de cada um com o grupo, dividindo tarefas que contribuam para que todos atinjam o objetivo do grupo. Neste sentido, o padrão de copropriedade também é visto como um passo mais à frente no padrão de partilha.

A colaboração é uma metodologia de trabalho muito usada em investigação, que traz ganhos para a própria investigação e para o desenvolvimento profissional dos professores que nela participam. De facto, esta forma de trabalho favorece o acesso aos professores e proporciona espaços de partilha de experiências, de conhecimentos e de reflexão, numa relação de confiança, respeito e de igualdade, com vista a atingir um objetivo comum, por exemplo, progredir na compreensão de uma dada problemática, apoiar o envolvimento numa inovação curricular, promover o trabalho com alguém que já se conhece e mudar relações de poder em instituições.

Assumindo as principais ideias apontadas pelos diversos autores mencionados, neste estudo encara-se a colaboração como um meio através do qual os professores se envolvem na planificação e condução de discussões coletivas em sala de aula, focado na partilha de experiências relacionadas com as suas práticas de dinamizar discussões coletivas, com vista a contribuir para o desenvolvimento e aperfeiçoamento dessas práticas. Com este estudo, pretende-se, ainda, criar um contexto favorável ao desenvolvimento profissional dos participantes, com incidência para o desenvolvimento e aprofundamento do seu conhecimento didático na dinamização de discussões coletivas.

Dispositivo do estudo

O dispositivo do estudo envolve um trabalho colaborativo com três professores do 3.º ciclo do ensino básico, do mesmo Agrupamento de Escolas (dois da mesma escola e o outro de uma outra escola próxima), que tem como principal objetivo conhecer como se desenvolvem, nos seus conhecimentos e práticas, nas fases de preparação e dinamização das discussões matemáticas coletivas, com vista à promoção da aprendizagem dos alunos em tópicos de Álgebra. A opção por trabalhar com um grupo de três professores justifica-se pelo facto de, como dizem Boavida e Ponte (2002), ser necessário gerir a diferença, já que cada um tem os seus objetivos e ideias. De forma a facilitar a realização das sessões de trabalho colaborativo e a recolha de dados, privilegia-se a escolha de professores do mesmo Agrupamento.

A organização de um grupo de trabalho colaborativo partiu do meu interesse, enquanto investigadora, em estudar a problemática das discussões neste contexto de desenvolvimento colaborativo de professores do 3.º ciclo do ensino básico (Boavida & Ponte, 2002). A opção pela dinamização de um trabalho colaborativo prende-se com o objetivo do estudo, pois este favorece a criação de uma relação interpessoal mais próxima que potencia um clima benéfico à reflexão sobre as práticas profissionais e, consequentemente, ao enriquecimento profissional de cada um. O desenvolvimento profissional é promovido pelo envolvimento dos participantes em contextos colaborativos, onde o professor tira partido da interação com os outros, sentindo-se apoiado e onde pode aprender e partilhar experiências/aprendizagens (Ponte, 2005a). O trabalho colaborativo surge como um bom contexto para o progresso dos professores, porque se centra na procura genuína de respostas, em vez da manipulação de perguntas para as quais se sabe desde logo a resposta. Neste sentido, esta forma de trabalho pode contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores, nomeadamente, para o desenvolvimento do seu conhecimento didático e práticas de sala de aula, da sua reflexão e da sua colaboração (Menezes & Ponte, 2009).

A minha opção por esta forma de trabalho está relacionada com uma das razões apontadas por Boavida e Ponte (2002) para o envolvimento num trabalho de natureza colaborativo, nomeadamente, o avançar na compreensão de um certo problema, neste caso a preparação e dinamização de discussões matemáticas em grande grupo numa abordagem de ensino-aprendizagem exploratório, com vista à promoção da aprendizagem dos alunos, no âmbito do desenvolvimento do pensamento algébrico. Neste sentido, pretendo que o trabalho colaborativo reflita o interesse comum numa inovação curricular, já que pretendo estudar as discussões numa abordagem de ensino-aprendizagem exploratório.

Com este objetivo em mente, iniciei o contacto com diversos diretores, coordenadores de departamento e professores de vários Agrupamentos de escolas de uma cidade do centro de Portugal, apresentando o objetivo do estudo, a proposta de trabalho a desenvolver e respetiva duração. Os professores mostraram-se pouco motivados com a escola e com as condições do ensino, nomeadamente com a instabilidade profissional daquele momento, não evidenciando grande interesse em participar no estudo. Apenas os professores de um Agrupamento aceitaram o desafio. Contudo, umas semanas após essa aceitação uma das professores desistiu da colaboração invocando motivos de saúde, o que desencadeou a desistência dos outros colegas. Nessas conversas informais, foi evidente para mim que os professores aceitam este tipo de desafio quando avançam com outros colegas que já conhecem e com quem estão habituados a trabalhar. Perante este retrocesso, alarguei o campo de contactos a Agrupamentos de escolas de concelhos vizinhos, através do contacto via correio electrónico a um professor que eu conhecia. Depois de ouvir os colegas de departamento, o professor informou-me que a minha proposta de trabalho tinha despertado interesse, à qual lançou uma contraproposta que mereceu a minha total atenção e culminou na realização de uma ação de formação, designada de *Práticas da discussão matemática e desenvolvimento do pensamento algébrico*, com a duração de 30 horas (apresentada mais à frente e onde a investigadora é a formadora). Nesse contacto, o professor informou-me da realização de uma reunião de trabalho, onde concordámos que seria importante a minha presença para conhecer o grupo de professores, apresentar a proposta e esclarecer todas as dúvidas relacionadas com a mesma. Assim, no dia 9 de julho de 2013 reuni com o grupo de Matemática, onde tive oportunidade de me apresentar, de dar a conhecer o objetivo do meu estudo e do trabalho que pretendia desenvolver com eles, assim como frisar que se tratava apenas de uma proposta que estava aberta a negociação. Nesse dia, o grupo não colocou questões nem avançou para a negociação da proposta. Contudo, pareceu-nos que seria importante agendarmos outro contacto no início do ano letivo seguinte para discutirmos em pormenor a proposta e definirmos o trabalho a desenvolver. Neste primeiro contacto com o Agrupamento, falei ainda com o seu diretor que mostrou total receptividade à realização do estudo e à colaboração dos professores do Agrupamento. Comprometi-me com o diretor do Agrupamento em fazer chegar os pedidos de autorização no início do ano letivo seguinte.

A aceitação da proposta dos professores justificou-se na medida em que pareceu não comprometer o objetivo do estudo e também porque considero importante que os professores notem que as suas ideias são relevantes e que se sintam envolvidos no trabalho, facto só possível quando participam de forma livre e acreditam no trabalho que pretendem desenvolver. Outra das razões que me levou a aceitar o desafio lançado por este grupo de professores foi saber que estavam habituados a trabalhar desta forma e a participar em vários projetos, nomeadamente de investigação, nesta modalidade de formação. Assim, decidi avançar com a organização da ação de formação, na modalidade de oficina de formação, numa lógica de desenvolvimento profissional, ao tomar como ponto de partida os conhecimentos do professor que podem ser desenvolvidos, articulando teoria e prática e ao incluir a partilha de experiências, reflexões, leituras e permitir ao professor tomar decisões relativamente às questões que pretende considerar (Ponte, 1995). Ou seja, a ação de formação foi pensada de forma a promover o desenvolvimento profissional, tirando partido das oportunidades de formação que correspondem às suas necessidades e objetivos, sem esquecer o seu papel de participante crítico (Ponte, 1995). A formação foi, também, perspetivada como meio de favorecer o desenvolvimento profissional, na medida em que cada professor que quer melhorar profissionalmente tem todo o interesse em aproveitar as ocasiões que surgem e que correspondem às suas necessidades e motivações (Ponte, 1998). A formação proporcionada contribuiu para a formação na área de especialidade em que os professores ensinam, em particular no tema das discussões matemáticas e da Álgebra, assim como para o desenvolvimento do seu conhecimento na sua vertente pessoal e didática, associada à prática letiva.

A ideia inicial de ter um grupo colaborativo de três professores, juntamente com a investigadora, que trabalhasse as discussões coletivas no ensino da Álgebra, foi alterada face à contraproposta do Agrupamento de desenvolver uma oficina de formação que envolvesse todos os 15 professores de Matemática. A criação desse grupo colaborativo era, como já foi explicado, fundamental para a realização deste estudo, implicando um trabalho que estava para além daquilo que uma oficina de formação exige, nomeadamente a preparação, observação e reflexão de um conjunto significativo de aulas de cada professor, num período de tempo longo. Por isso, as duas primeiras sessões informais, para além do que foi indicado, serviram para perceber quais os professores que estariam interessados neste tipo de trabalho que seria um aprofundamento ao realizado por todos os outros. Para facilitar o trabalho, estes três professores funcionaram como grupo, sempre que nas sessões de formação se trabalhava em grupo, interagindo com os outros nas discussões em grande grupo. Este subgrupo de três professores, mais a investigadora, é então designado de "grupo colaborativo" e, para além das sessões de formação, inclui colaborações na preparação, acompanhamento e reflexão de aulas. Por esse motivo, algum do trabalho autónomo realizado por este grupo colaborativo nas sessões de formação foi diferente do dos restantes colegas (clarificado mais à frente).

Estes três professores aceitaram trabalhar colaborativamente a partir de um interesse meu, estando eu recetiva a negociar papéis e tarefas. Sempre pretendi que os professores assumissem o trabalho de natureza colaborativa como voluntário (surgindo da vontade dos atores), partilhado (partindo da necessidade dos participantes), orientado para o desenvolvimento do trabalho (sendo definidas finalidades e tarefas a desempenhar) e prolongado no tempo (decorrendo ao longo de um ano) (Santos, 2001). Desde o início, foi meu objetivo que esta forma de trabalho fosse encarada numa base de construção mútua de conhecimento, onde eu e os professores trabalhássemos em conjunto, ajudando-nos reciprocamente, de forma a que todos tirássemos partido destes momentos de trabalho (Boavida & Ponte, 2002), não sendo, no entanto, necessário que todos oferecêssemos e recebêssemos o mesmo, mas que fosse igualmente importante.

Para a edificação das bases do grupo de estudo, na primeira reunião, negociei com os professores escolhidos ideias e formas de trabalho, a partir da minha ideia e plano inicial, de forma a evitar o afastamento relativamente ao objeto de estudo e assegurar condições favoráveis ao seu funcionamento, como o espaço e o tempo. Esta primeira sessão de trabalho teve ainda como finalidade a apresentação e o estreitamento de relações entre a investigadora e os participantes, já que os professores se conheciam bem e a grande maioria deles trabalhava em conjunto regularmente, mas a investigadora era um elemento externo que não os conhecia. Contudo, com o desenrolar do trabalho colaborativo pretendi que todos se ficassem a conhecer melhor e se estabelecessem relações de confiança cada vez mais fortes, tornando-se assim a colaboração mais intensa, numa lógica emergente (Ponte, 2005b). Na primeira reunião de formação negociei o calendário das sessões a realizar, assim como o horário e o local mais favorável a todos os participantes. Apesar da definição do calendário a seguir ser da responsabilidade conjunta, a minha proposta inicial teve por base a realização de sessões de trabalho de três em três semanas, durante o 1.º período do ano letivo de 2013-2014, e sessões de trabalho quinzenais a decorrer nos 2.º e 3.º períodos desse ano letivo. A proposta inicial foi sofrendo algumas alterações, em virtude de constrangimentos externos, como a minha colocação, em meados de novembro de 2013, a lecionar ao ensino noturno no mesmo dia da semana em que decorriam as sessões de formação, de reuniões de departamento dos professores participantes e de ajustes em função da evolução do trabalho desenvolvido nas sessões do grupo colaborativo e das planificações dos professores.

As sessões de trabalho propostas aos 15 professores, denominadas de sessões conjuntas (SC), foram de dois tipos: *sessões de discussão* e *sessões de preparação e reflexão*. As primeiras, envolvendo todo o grupo de 15 professores, previam a análise e discussão de textos relacionados com o tema das discussões matemáticas coletivas e de vídeos relacionados com a condução desses momentos de aula. Esses vídeos foram selecionados de aulas dos professores participantes e de outros. Para essa análise inspirei-me no conceito de clube de vídeo (*vídeo clubs*) de van Es (2010). Esta metodologia permitiu aos professores partilhar experiências em conjunto através da observação de aulas, promovendo uma cultura de reflexão através de uma pessoa que desempenhou o papel de facilitador – investigador. A investigadora focou a atenção dos professores em determinadas passagens do vídeo, com o intuito de aprofundar e refletir sobre aspetos particularmente relevantes das discussões, nomeadamente, as interações que se geraram entre os alunos e alunos/professor, a exploração de situações de desacordo e negociação de significados. Esses clubes enquadraram-se bem na natureza do trabalho colaborativo, já que foram usados como espaços de reflexão, onde os professores se envolveram na identificação das interações que ocorreram na sala de aula, através do conhecimento que possuíam dos seus alunos, dos conteúdos e do currículo, fundamentais para a promoção de discussões e para a consequente aprendizagem dos alunos, uma vez que se procuraram indicadores das suas formas de pensar.

Os clubes de vídeo permitiram-me olhar para o que os professores pensavam sobre as situações analisadas, recolher informação sobre o seu conhecimento didático e ações de ensino, enquanto os professores olhavam para os pensamentos e caraterísticas dos alunos.

As *sessões de preparação e reflexão* decorreram em paralelo com a lecionação dos tópicos Sequências e regularidades, Funções e Equações. Nessas sessões de trabalho prepararam-se sequências didáticas, no grupo colaborativo e em grupos de trabalho constituídos com os restantes professores, a partir de propostas da investigadora e dos professores. Essa preparação exigiu a seleção adequada de tarefas; a discussão sobre o modo mais apropriado de trabalho dos alunos, de possíveis estratégias, de prováveis erros ou dificuldades dos alunos e formas de as ultrapassar, assim como a preparação do momento de condução da discussão coletiva, que envolveu pensar sobre uma possível sequenciação das apresentações das resoluções dos alunos e conexões a estabelecer, de forma a conduzir à negociação de significados e à construção de conhecimentos matemáticos. Nessas sessões propus, ainda, ao grupo dos 15 professores a reflexão de algumas das suas aulas observadas, sustentada na análise de vídeos à semelhança das sessões de discussão. Essa análise focou-se nos momentos de condução das discussões coletivas e foi apoiada na apreciação das resoluções dos alunos, discutindo-se opções tomadas, por exemplo, quanto à sequenciação das apresentações e conexões estabelecidas entres as ideias dos alunos. Desses momentos de reflexão, surgiram, por vezes, alterações às sequências didáticas desenvolvidas. As sessões de trabalho colaborativo e de formação foram apoiadas na análise dos Programas de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007 e 2013), no que respeita às capacidades transversais e ao tema matemático Álgebra, dado que os tópicos matemáticos abordados no 7.º ano de escolaridade estavam apoiados no Programa de Matemática de 2013 (entrado em vigor no ano de recolha dos dados) e os tópicos do 8.º ano no Programa de 2007. Ao longo do trabalho, uso, essencialmente, a nomenclatura do Programa de Matemática de 2007, em particular, de "tópico matemático" em vez de "domínio" (sugerido pelo Programa de 2013), por me identificar mais com as ideias preconizadas por esse documento curricular de 2007.

A última sessão de formação proposta aos professores teve como propósito fazer o balanço de todo o trabalho desenvolvido, onde se convidaram os professores a fazerem uma reflexão sobre o seu desenvolvimento profissional, olhando para a sua prática letiva, com particular incidência para a condução das discussões coletivas. Nessa reflexão, orientou-se também olhar para as aprendizagens dos alunos, já que todo o trabalho desenvolvido pelo grupo teve como um dos propósitos contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e para uma melhor compreensão da Matemática.

Todos os momentos de trabalho formativo foram encarados como espaços de colaboração, onde se partilharam e discutiram práticas e se construiu uma aprendizagem coletiva a partir da reflexão, articulando teoria e prática.

Participantes

Os participantes do estudo são 15 professores do 3.º ciclo do ensino básico pertencentes a um Agrupamento de escolas da região centro de Portugal (com exceção de duas professoras por terem mudado de Agrupamento no ano letivo 2013-2014 e o primeiro contacto com os professores ter decorrido no ano letivo 2012-2013), a lecionar Matemática no ano letivo de 2013-2014. Destes foram selecionados três casos: a professora Ana, o professor Jorge e o professor Afonso (nomes fictícios). A professora Ana leciona ao 7.º ano de escolaridade, o professor Jorge ao 8.º ano de escolaridade e o professor Afonso leciona aos 7.º e 8.º anos de escolaridade. A professora Ana e o professor Jorge lecionam na mesma escola e o professor Afonso numa outra escola pertencente ao mesmo Agrupamento. A escolha destes professores respeitou os critérios seguintes: *i)* lecionarem aos 7.º e 8.º anos de escolaridade; *ii)* manifestarem vontade e disponibilidade em participar no estudo; *iii)* serem do mesmo Agrupamento, para facilitar as sessões de trabalho colaborativo e a recolha de dados; e *iv)* do quadro de Agrupamento, para não comprometer o início do estudo que coincidiu com o início do ano letivo.

Os três professores participantes voluntariaram-se de imediato, garantindo-se diversidade de percursos profissionais, principalmente no investimento na formação e também na atividade letiva, com um professor a lecionar em cada um dos anos de escolaridade pretendidos e o outro a lecionar aos dois anos. Os três professores são professores de carreira e contam com uma vasta experiência profissional, com um número de anos de serviço docente entre vinte e trinta.

Os participantes foram informados clara e objetivamente dos meus interesses, de forma a garantir uma boa cooperação e colaboração no trabalho a desenvolver, onde todos tiveram oportunidade de se desenvolverem profissionalmente, aprofundando as suas práticas, em particular as práticas de condução de discussões coletivas. Para além disso, os participantes do estudo contaram sempre com a minha responsabilidade de investigadora e tiveram, desde o primeiro contacto, salvaguardado o direito à privacidade ou à não-participação, à confidencialidade e à permanência no anonimato (Tuckman, 2000). Antes do início do estudo, eu não conhecia os participantes, apesar de os professores já se conhecerem, por serem do mesmo quadro de Agrupamento. O facto de os professores se conhecerem e estarem habituados a trabalhar em conjunto foi benéfico para a constituição do grupo colaborativo.

Recolha e análise de dados

Neste estudo recorreu-se a três instrumentos de recolha de dados: observação participante, entrevista e análise documental. No início do estudo foram realizadas entrevistas aos três professores (Ana, Jorge e Afonso), com vista a conhecer alguns aspetos profissionais e as suas conceções e práticas relativamente à condução de discussões em grande grupo e ao tema matemático Álgebra, já que toda a informação é importante para compreender as ações dos intervenientes e as entrevistas têm a particularidade de "recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 34), permitindo aceder ao que "está dentro da cabeça de uma pessoa" (Tuckman, 2000, p. 307). No fim do estudo foram realizadas novas entrevistas, para se conseguir uma visão global do trabalho desenvolvido.

As entrevistas realizadas foram semiestruturadas, procurando-se adequar as questões às fases do trabalho, uma vez que numa fase inicial, e porque se pretendeu compreender de uma forma global o conhecimento do professor, as questões mais abertas tiveram vantagens, enquanto que numa fase mais avançada da investigação se tirou mais partido de questões um pouco mais estruturadas e focadas no trabalho realizado ao longo de todo o percurso. As entrevistas foram preparadas cuidadosamente, já que pretendia que as questões a fazer não levassem os entrevistados a responder de acordo com o que eu gostaria de ouvir, ou a transmitirem uma boa impressão da sua parte (Tuckman, 2000), mas que fossem representativas dos seus pensamentos e perspetivas. Para tal, elaborei um guião de entrevista estruturado em quatro partes, na entrevista inicial (Anexo 1) e em três partes, na entrevista final (Anexo 2), com vista a recolher informação dos participantes relativamente a aspetos determinantes acerca do estudo que se pretendia desenvolver. Da entrevista inicial (identificada por EI_data) para a entrevista final (identificada por EF_data) manteve-se, de forma geral, o mesmo guião, deixando-se cair a parte relativa à caracterização dos aspetos profissionais dos participantes e privilegiando os temas relacionados com a proposta de trabalho colaborativo, o tema das discussões matemáticas e o tema da Álgebra. No decorrer das entrevistas, algumas questões presentes no guião sofreram pequenos ajustes, face às ideias apresentadas pelo entrevistado, de modo a compreender melhor o ponto de vista dos participantes (Lessard-Hébert, Goyette, & Boutin, 1994).

Os dados foram, ainda, recolhidos através de observação de aulas e dos momentos de trabalho conjunto no grupo dos três casos do estudo e no grupo de formação, onde se prepararam e discutiram essas aulas. Este tipo de recolha de dados permitiu aceder a outro tipo de informação, já que está associada a sistemas narrativos de registos de dados (Lessard-Hébert et al., 1994). Este instrumento de recolha de informação possibilitou o acesso a dados recolhidos em locais distintos, onde o professor foi observado na sua atuação em sala de aula e nos momentos de preparação e reflexão das mesmas, permitindo-me compreender melhor as perspetivas dos participantes do estudo, porque tive oportunidade de aceder às atividades que desenvolveram e ver como as concretizaram no seu contexto de trabalho. Estes dados foram recolhidos com o apoio de gravações áudio e vídeo. As gravações áudio foram usadas, preferencialmente, nas sessões de trabalho no grupo colaborativo dos casos do estudo e no grupo de formação e as sessões vídeo nas aulas observadas a cada professor, com exceção da primeira aula observada. Optei por não gravar em vídeo a primeira aula observada a cada um dos três professores, para minimizar os constrangimentos e o desempenho dos alunos e dos professores na aula, já que seria a primeira vez que eu estaria presente. Para além de os alunos não me conhecerem, a presença de uma câmara de vídeo na sala de aula poderia ser motivo de distração ou de inibição para o envolvimento dos alunos na aula. Esta aula inicial decorreu pouco tempo depois de se ter iniciado o estudo, no momento em que as relações de colaboração poderiam ainda não ser suficientemente fortes para os professores se sentirem à vontade com a presença da câmara de vídeo.

A investigadora foi uma observadora participante, já que trabalhei em conjunto com os professores, quer nas sessões de formação (identificadas por N.º SC_data), quer no apoio individual prestado aos alunos no decorrer das aulas observadas (identificadas por Aula Tema_data). Esta opção permitiu-me ficar a conhecer estratégias de resolução realizadas pelos alunos e a compreender melhor, posteriormente, as ações dos professores e forma de conduzir a discussão coletiva. Nas aulas, intervim, pontualmente e especialmente nas aulas do professor Afonso, porque o professor mostrou desejo nessa intervenção e porque se revelou pertinente seguir ou ampliar alguma ideia que não estava a ser aproveitada pelo professor. Esta participação está em linha com o espírito de colaboração desejado e vivido no grupo colaborativo e veio a ser reconhecido pelos professores como uma mais valia à sua prática, uma vez que permitiu completar atuações ou destacar estratégias dos alunos que não tinham sido identificadas pelos professores. Embora assumindo o papel de observadora participante, olhei para o que procurava, sem influenciar o que estava a ver (Tuckman, 2000). Os dados recolhidos durante essa observação foram registados na forma de notas de campo (identificadas por NC_data), que relatam as experiências vividas pela investigadora nesse decurso (Bogdan & Biklen, 1994).

A análise documental, em articulação com a observação participante e a entrevista, permitiu completar os dados obtidos pelos outros instrumentos favorecendo a triangulação dos mesmos, já que é "uma espécie de análise de conteúdo que incide sobre documentos relativos a um local ou a uma situação" (Lessard-Hébert et al., 1994), contribuindo para responder às questões de investigação.

Este instrumento de recolha de dados favoreceu o acesso às produções matemáticas dos alunos, fundamentais para a análise das ações dos professores na condução das discussões coletivas, já que cada professor atua em função dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos, das questões colocadas e das interações estabelecidas. Os documentos produzidos pelos professores também foram objeto de análise, em particular: *i)* as suas planificações das aulas, porque embora as aulas tenham sido preparadas em conjunto nas sessões de trabalho colaborativo, cada professor teve liberdade de fazer os ajustes considerados necessários, de acordo com as características dos seus alunos; *ii)* o relatório individual (identificado por RI_data) produzido para avaliação da ação de formação, que reflete as aprendizagens e vivências dos professores conseguidas com a sua participação neste estudo; e iii) questionário anónimo preenchido na última sessão conjunta (identificado por QA_data), que favorece o acesso à perspetiva dos professores sobre o trabalho realizado ao longo das várias sessões de trabalho conjunto.

A análise de dados incidiu sobre a análise de conteúdo e a definição de categorias de codificação, como forma de organizar os dados descritivos recolhidos. Esta análise decorreu paralelamente à recolha de dados e prolongou-se para além do fim da recolha. Foram objeto de análise, o conteúdo das entrevistas, das aulas observadas (análise de cinco discussões coletivas a cada professor), das notas de campo e dos documentos dos professores e alunos.

A análise de conteúdo teve início com as transcrições das entrevistas realizadas aos professores, das sessões de trabalho colaborativo e das aulas observadas a cada professor. Após essa fase, os dados foram percorridos com vista à identificação de regularidades que conduziram ao estabelecimento de categorias (*a posteriori*) – palavras ou frases que representam as regularidades encontradas (Bogdan & Biklen, 1994), designada por leitura flutuante (Bardin, 1994). A definição das categorias tirou partido da problematização da revisão de literatura efetuada e da necessidade de contemplar o que emergia dos dados. Após o estabelecimento dessas categorias houve uma primeira tentativa de organizar os dados nas respetivas categorias – recorte (Bardin, 1994), de modo a verificar a viabilidade das mesmas, procedendo-se a ajustes que incluíram o abandono, a definição ou redefinição de novas categorias. Este processo recursivo de análise de conteúdo teve como finalidade encontrar uma forma de organizar os dados que favorecesse a sua interpretação para comunicação aos outros, dando a conhecer as principais conclusões do estudo, e para responder às questões de investigação e não arranjar, simplesmente, o sistema de codificação correto.

A leitura cuidada das entrevistas, das sessões de trabalho colaborativo, das notas de campo e das aulas dos professores durante a recolha de dados permitiu, para além da tentativa de definir as categorias de análise, preparar as sessões de trabalho seguintes, com vista à discussão de ideias importantes relacionadas com a discussão matemática e as práticas dos professores.

Os dados emergiram da recolha e foram analisados tendo em conta três dimensões principais: a preparação da discussão coletiva, a dinamização da discussão coletiva e o conhecimento didático do professor. Saliento que a última dimensão de análise foi estudada de forma integrada com as outras duas, de forma a evidenciar a relação entre as práticas do professor e o seu conhecimento. O conhecimento didático do professor foi analisado segundo o modelo proposto por Ponte (2012), na medida em que o encara numa perspetiva integradora que mobiliza diversas vertentes do conhecimento, como o conhecimento do currículo, da prática letiva, da Matemática e dos alunos e da aprendizagem.

Para cada dimensão de análise defini temas que foram concretizados em diversas categorias, de acordo com os quadros teóricos revisitados na revisão de literatura. As categorias estabelecidas foram aplicadas transversalmente às diversas aulas desenvolvidas pelos professores que constituem os casos do estudo e demais dados recolhidos. Com esta opção, procurei garantir maior unidade para cada caso, evitando repetições e evidenciando melhor o percurso de cada professor, quanto às suas práticas de discussão.

A dimensão *Preparação da discussão coletiva* é analisada de acordo com os temas e categorias a seguir indicados (Quadro 2):

Quadro 2

Temas e categorias da dimensão Preparação da discussão coletiva.

Dimensão	Temas	Categorias definidas
Preparação da discussão coletiva	Tarefas e Propósito da discussão	Natureza; desafio; contexto; representações Conceitos matemáticos e objetivos específicos; generalização
	Estratégias de resolução	Tentativa e erro; tabela; algébrica
	Seleção de estratégias e Trajetórias de sequenciação	Representações Linguagem matemática informal; linguagem matemática formal

A preparação da discussão coletiva contemplou as tarefas selecionadas pelo professor para envolver os alunos no discurso da aula. Essas tarefas foram analisadas tendo em conta a sua natureza e desafio (Ponte, 2005a), de acordo com o objetivo de discussão estabelecido. O contexto e representações sugeridos pelas tarefas selecionadas pelo professor foram discutidos em função dos objetivos estabelecidos e da promoção da generalização das ideias matemáticas envolvidas. A preparação da discussão focou, ainda, a identificação do propósito que se pretende atingir com aquela discussão em sala de aula e refere-se aos conceitos matemáticos e objetivos específicos envolvidos nas situações que são propostas aos alunos e à generalização dessas mesmas ideias. Essa identificação dos conceitos matemáticos que se pretendem discutir é feita antes e durante a aula. Em discussões envolvendo tarefas relacionadas com ideias algébricas, a generalização dessas ideias é fundamental, já que, como refere Driscoll (1999), permite olhar para além das particularidades de uma dada situação e estabelecer conclusões.

Face às tarefas selecionadas e ao propósito definido para a discussão, o professor antecipa estratégias de resolução que os alunos podem desenvolver no decorrer do seu trabalho (Stein et al., 2008). O professor pode antecipar estratégias que recorram a tentativa e erro, ao uso de uma tabela ou à escrita de uma expressão algébrica. Essas estratégias são também analisadas na preparação da discussão em sala de aula, com base nas estratégias de resolução apresentadas pelos alunos. Tendo por base as estratégias antecipadas e apresentadas pelos alunos, o professor seleciona as que têm potencial para serem partilhadas em grande grupo (Stein et al., 2008), em função das representações usadas pelos alunos nas suas resoluções. De seguida, o professor define uma possível trajetória de sequenciação para as estratégias selecionadas, antes e durante a aula, privilegiando a linguagem matemática informal e formal usada pelos alunos nas suas estratégias de resolução. A análise destes dois tipos de linguagens evidencia a emergência da generalização no trabalho com tarefas relacionadas com a Álgebra.

A *dinamização da discussão coletiva* é discutida de acordo com os temas e categorias apresentados a seguir (Quadro 3):

Quadro 3

Temas e categorias da dimensão Dinamização da discussão coletiva.

Dimensão	**Temas**	**Categorias definidas**
Dinamização da discussão coletiva	Componentes da discussão, discurso	Apresentação; comparação, avaliação e filtragem; conclusão Solicitação e discussão de muitas ideias; filtragem; solicitação e discussão de muitas ideias; conteúdo matemático filtrado; conteúdo matemático não filtrado
	Ações de ensino	Elicitar; Apoiar; Informar; Desafiar

Uma discussão coletiva assenta em três componentes distintas com objetivos também diversos: apresentação, comparação, avaliação e filtragem, e conclusão. Estas categorias foram reajustadas do modelo de Sherin (2002), agrupando-se as duas últimas componentes numa só e incluindo uma terceira designada, neste estudo, de conclusão, por traduzirem melhor a forma como os professores dinamizaram a discussão em sala de aula. Na primeira, que tem como objetivo convidar os alunos a partilhar as suas ideias, analiso como os professores iniciam a discussão e as estratégias que começam por privilegiar. De seguida, estudo como os professores continuam a discussão levando os alunos a comparar e avaliar as ideias partilhadas. Na terceira componente, evidencio como os professores focam a atenção dos alunos nas ideias matemáticas relevantes, de forma a levá-los a evoluir nas suas ideias iniciais e a atingir os objetivos que tinham estabelecido para a discussão.

Analiso o discurso promovido numa discussão coletiva segundo o quadro teórico de Sherin (2002a). Esse discurso pode ser representado por um "duplo funil", já que inicia com a solicitação de muitas ideias para serem partilhadas, seleção das ideias mais importantes para atingir o objetivo da discussão e solicitação de mais ideias que deem continuidade às ideias filtradas. A repetição da categoria solicitação de muitas ideias pretende mostrar o caráter cíclico do discurso que é promovido durante o envolvimento dos alunos em discussões coletivas. Esse processo de estreitamento/alargamento dado às ideias dos alunos evidencia que os professores, numa fase inicial, não estão muito preocupados com o conteúdo das ideias partilhadas (Sherin, 2002a) – conteúdo matemático não filtrado. Nesse momento, os professores pretendem ter muitas ideias para serem discutidas e só numa fase posterior se preocupam com o conteúdo dessas ideias, selecionando as que pretendem que os alunos discutam mais aprofundadamente – conteúdo matemático filtrado.

Durante a dinamização da discussão, os professores desempenham diversas ações de ensino que se relacionam com as componentes da discussão. As categorias usadas para as ações empreendidas pelos professores na dinamização da discussão foram reconstruídas a partir do quadro teórico de Ponte e colegas (2013), face à análise preliminar de dados. Especificamente, recorro às categorias ações de elicitar para levar os alunos a apresentarem as suas estratégias; apoiar, para o ajudar a progredir na sua apresentação, explicação e justificação, recordando o objetivo da discussão ou da tarefa, sugerindo a interpretação de uma ideia, repetindo um argumento, reforçando o pensamento dos alunos e introduzindo ideias ou representações diferentes; informar, para reforçar alguma ideia especial, alertar para algum raciocínio e fazer sínteses; e desafiar, para levar o aluno a aprofundar e/ou ampliar o seu raciocínio, através do pedido de justificações, explicações, introdução de representações, questionamento aos colegas e argumentar.

Os três casos que compõem este estudo são estruturados em quatro secções: *i)* o percurso profissional: apresento, de forma breve, o professor que constitui o caso e os aspetos mais marcantes da sua vida profissional, com o propósito de se ficar a conhecer melhor o professor e apoiar na interpretação das práticas de discussão que evidencio nas seções seguintes; *ii)* a preparação da discussão coletiva: descrevo as práticas do professor, em articulação com o seu conhecimento didático, na preparação da discussão, nomeadamente na definição do objetivo da discussão, da escolha das tarefas que vai propor aos seus alunos e antecipação de possíveis estratégias de resolução que eles podem desenvolver, que estratégias selecionar para partilhar em coletivo e como as organizar, de forma a envolver os alunos em discussões produtivas; *iii)* a dinamização da discussão coletiva: analiso a forma como o professor organiza a discussão coletiva e como gere as intervenções dos alunos de forma a promover o desenvolvimento de ideias algébricas, assim como as ações que realiza para envolver os alunos na discussão, a partir do seu conhecimento didático; e *iv)* síntese: destaco os aspetos mais marcantes do percurso do professor, nas suas práticas de discussão e conhecimento didático mobilizado na concretização dessas práticas.

CAPÍTULO VI

Contexto do estudo

Este capítulo encontra-se organizado em seis secções. Na primeira, apresento o trabalho desenvolvido na oficina de formação, acompanhado dos contributos mais relevantes dos seus participantes, resultado das diversas reflexões que se proporcionaram ao longo das várias sessões de trabalho. Na segunda secção, faço um breve balanço do trabalho desenvolvido no decorrer da oficina de formação, mostrando a perspetiva dos professores, apoiada no questionário anónimo que preencheram na última sessão conjunta e nos seus relatórios individuais. Evidencio, ainda, nessa secção as dificuldades encontradas ao longo do decorrer da formação. Na terceira secção, apresento o grupo colaborativo do estudo e o trabalho desenvolvido pelo mesmo, fundamentalmente, na preparação de tarefas para a sala de aula com vista à promoção de discussões matemáticas coletivas. Esse trabalho foi realizado, essencialmente, nas sessões conjuntas mas ainda contou com dois encontros fora dessas sessões. Na quarta secção, exponho algumas das ideias que emergiram das reflexões feitas nas várias sessões conjuntas, pelo impacto que podem ter no desenvolvimento profissional dos professores que constituem os casos deste estudo. As suas práticas em sala de aula decorreram em paralelo com as discussões que se iam mantendo no grupo de formação. Na quinta secção, refiro as tarefas realizadas por cada um dos professores caso que desencadearam as diversas discussões coletivas desenvolvidas nas suas aulas. Na última secção, faço uma breve caracterização de cada uma dessas tarefas.

Práticas da discussão matemática e desenvolvimento do pensamento algébrico: a oficina de formação

As sessões conjuntas

A oficina de formação decorreu ao longo de dez sessões conjuntas com um grupo de 15 professores de Matemática, focando as discussões matemáticas coletivas no ensino da Álgebra. A seguir, apresento uma descrição de cada uma dessas sessões, incorporando falas dos professores (identificados por pseudónimos).

1.ª sessão (1/10/2013): No início da primeira sessão esteve presente um elemento do centro de formação que deu as boas vindas aos participantes e desejou um excelente trabalho. A reunião continuou com a apresentação, ao grupo, de um documento (Anexo 3), que embora sendo uma proposta de trabalho que podia ser sempre ajustada com o decorrer do tempo, em função dos interesses e necessidades do grupo, especificava o objetivo, a metodologia e o modo de avaliação da oficina de formação e continha um breve resumo do trabalho a desenvolver em cada uma das sessões. O grupo considerou que esse era o momento ideal para agendar as duas sessões de trabalho seguintes (24/10 e 14/11), decidindo mudar o dia da semana, inicialmente escolhido para as reuniões, de forma a permitir a participação de uma colega que entretanto tinha sido colocada a cerca de 85 km do local onde decorria a formação.

A opção pela apresentação desse documento justificou-se pela importância da existência de uma proposta escrita que refletisse o compromisso de todos pelo trabalho que se esperava desenvolver. Após a análise e troca de algumas ideias sobre o documento, em particular sobre o modo de avaliação, foi proposto ao grupo a visualização de um pequeno vídeo relativo a uma parte de um momento de discussão coletiva de uma aula do 7.º ano, sobre o tópico Equações (Anexo 4). A reflexão sobre o referido episódio focou aspetos como as interações estabelecidas naquele momento da aula, os desafios que o professor enfrenta na condução de uma discussão, o papel do questionamento e os contributos da discussão matemática para a promoção da aprendizagem dos alunos. O grupo considerou que a discussão se centrou muito no professor, tendo os alunos discutido pouco entre si, − "Eu achei se calhar, uma discussão muito fraca por parte dos alunos (...) discutiram pouco entre si, ou nada." (Professor José) − e no grupo de alunos que estava a apresentar a sua estratégia de resolução − "a maior discussão tenha sido sempre os mesmos, que, se calhar, eram os que estavam a dominar de alguma forma a situação." (Professor Jorge).

Relativamente aos principais desafios que se colocam ao professor na condução de uma discussão, o grupo referiu, essencialmente, a seleção de ideias a levar à discussão coletiva

> Eu acho que é a opinião dos alunos (...) depois tentar saber o que é que nós vamos aproveitar (...) pode ser uma resposta errada de um aluno e perceber por que é que ele respondeu mal. Se calhar, a nossa tendência é aquele que respondeu bem, é ouvir aquele, não é? Eu acho que gerir muitos alunos a falar ao mesmo tempo, eu acho que é difícil nós apercebermo-nos o que é que vamos aproveitar. E naquele momento quem é que eu vou deixar falar, porque o que ele vai dizer pode ser importante para a discussão. (Professor Jorge)

e o envolvimento de todos os alunos na partilha dessas ideias:

> Eu acho que o difícil é manter os alunos envolvidos na discussão (...) que a discussão não seja o professor e o aluno que está no quadro e mais dois ali da frente que estão a participar, mas conseguir manter a turma toda sem que se crie uma grande balbúrdia. Eu acho que é muito difícil o disciplinar as intervenções e, por outro lado, manter a motivação (...) porque muitas vezes somos muito apertados e depois há logo uma data deles que já não ligam nada e outras vezes somos muito, deixamos tudo participar e aquilo perde-se ali, não se consegue gerir. (Professor José).

Quanto ao questionamento, os professores consideraram que as questões abertas foram privilegiadas no episódio visualizado – "Não insiste em perguntas muito fechadas, é muito: Porquê?, Explica., Explica porquê." (Professor José). Esse tipo de questões é fundamental no momento da discussão, já que é através delas que se consegue aceder ao pensamento dos alunos.

Após a análise do episódio, foi distribuído o texto *Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios*, de Paula Canavarro (2011), da revista Educação e Matemática para leitura e posterior reflexão. Contudo, o grupo considerou mais vantajoso fazer a sua leitura em casa e refletir na sessão seguinte, para que pudessem contribuir mais para a discussão.

Esta primeira sessão foi, ainda, marcada pela partilha de ideias em torno do documento *Metas Curriculares*, lançada por duas professoras que estavam a frequentar uma ação de formação relacionada com essa orientação curricular. As professoras sentiram necessidade de partilhar com o grupo alguns dos seus receios com a operacionalização das mesmas, nomeadamente, quanto a definições que apresentam e consequente influência nas práticas de sala de aula. Refletiram, em particular, sobre a definição de proporcionalidade direta e de equação. O grupo considerou que o Programa de Matemática de 2013 e as Metas Curriculares colocam em segundo plano o ensino-aprendizagem exploratório. Os professores mostraram, também, alguma preocupação relativamente à atitude que os alunos podem mostrar, no futuro, face à Matemática, já que os alunos estavam mais motivados e com uma atitude mais positiva em relação à disciplina e receiam que com as orientações curriculares de 2013 o que foi conseguido seja comprometido. Manifestaram, ainda, a sua apreensão relativamente à introdução de demonstrações logo no 7.º ano, já que, segundo eles, os alunos não têm, ainda, maturidade suficiente para compreenderem os princípios básicos de uma demonstração.

2.ª sessão (24/10/2013): A segunda sessão teve início com a presença da diretora do centro de formação que deu as boas vindas e desejou um bom trabalho a todos, já que não teve oportunidade de o fazer na 1.ª sessão, por motivos pessoais.

Esta sessão organizou-se em três partes: ponto de situação relativamente à sessão anterior; discussão do texto distribuído no último encontro de trabalho; e exploração de tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades.

Na primeira parte da sessão, com uma duração breve, recordou-se o trabalho desenvolvido na sessão anterior e as principais ideias resultantes da discussão em torno do episódio de sala de aula analisado. Os aspetos focados revelaram-se desafios à ação do professor na condução de uma discussão coletiva. De seguida, passou-se à análise do texto *Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios* (Canavarro, 2011), distribuído na sessão anterior. Sugeri que a discussão do texto incidisse no ponto 3 - *Orquestrar produtivamente as discussões matemáticas*, depois de fazer uma breve referência às características do ensino exploratório. Os professores sublinharam, a esse respeito, que esse tipo de ensino se afasta das ideias preconizadas no Programa de Matemática de 2013. Essa preocupação já tinha sido manifestada na sessão anterior, a propósito da troca de ideias em torno do documento das Metas Curriculares.

Propus aos professores que, para a discussão do ponto 3 do texto, tivessem em conta as suas experiências na condução de discussões matemáticas em sala de aula. Os professores consideraram que o termo orquestração de uma discussão não era o mais adequado, depois de o compararem com os termos construir e planear. Decidiram que o mais ajustado seria conduzir uma discussão − "Eu acho que era conduzir" (Professor José) − depois de analisarem a expressão moderar uma discussão, que foi abandonada por concluírem que o professor nesse momento da aula é mais interventivo do que numa moderação: “E é um trabalho que se calhar não é só aquilo que é visto. Engloba estes passos todos” (Professora Ana).

Os professores consideraram que apesar de conduzirem discussões em sala de aula não costumam ser muito metódicos nas práticas selecionar e sequenciar:

> Há uma coisa que eu quando faço muito este trabalho que se calhar não sou tão exigente, tão perfecionista como aqui diz, principalmente, na parte do selecionar e sequenciar. Eu, às vezes, sou um bocado, não é bem quem quer ir, não é bem assim, mas é muito assim, se calhar, e posso perder algumas coisas no momento da discussão por não fazer isto assim. (...) Eu acho que o que faço menos é esta parte de selecionar e sequenciar e procurar quais são as exposições e qual a sequência das exposições. (Professor José).

Para os professores, a opção por apresentar as práticas selecionar e sequenciar separadamente é um pouco forçada, já que quando o professor seleciona é tendo em vista a sequência:

> Eu acho que, aliás, o ponto 3 e o ponto 4 como estão interligados, que estar a fazer aqui dois pontos, acho isto um bocadinho forçado do lado da Stein e destas meninas, porque eu acho que tu quando selecionas é tendo em vista a sequência. (Professor José).

Quanto à prática antecipar, os professores afirmaram que esta beneficia do trabalho realizado em conjunto com outros colegas, já que enriquece a antecipação de possíveis estratégias de resolução a usar pelos alunos:

> Às vezes, por muito que a gente se esforce é uma barracada do caneco. Aparecem para lá umas coisas que a gente nem sonhava. Ainda se a preparação for feita em conjunto, quer dizer 3 ou 4 professores, ainda se consegue prever mais isto ou prever mais aquilo, agora um sozinho em casa a resolver aquilo, quando lá chega aparecem uma data delas que a gente nem sequer tinha imaginado. (Professor José).

Sendo claro para eles que o retorno que se tira do investimento nessa prática é ajudar a clarificar o que se pretende com aquela aula e lidar com situações de imprevisto, já que se pensa previamente em possíveis estratégias que os alunos podem usar, em dificuldades que podem sentir e em formas de as ultrapassar:

> Eu acho que a planificação pode clarificar exatamente o que a gente quer com aquela aula, o que nos pode levar a escolher o que eu quero discutir realmente e

> o que eu quero selecionar realmente (...) e claro depois tem isso que tu acabaste de dizer: minimizar as dificuldades que temos com a reação aos imprevistos, não é? Eles existem sempre, quanto mais ideias temos das várias formas de resolução menos imprevistos poderão surgir. (Professor José).

Os professores frisaram, ainda, que por vezes comprometem a condução da discussão por agarrarem de imediato uma ideia apresentada, que corresponde ao objetivo matemático daquela aula: "Às vezes, quando temos uma ideia de que queremos chegar ali, às vezes compromete muito a discussão, porque nós começamos a impingir" (Professor José).

Na prática monitorizar, os professores concluíram que o mais difícil é decidir que tipo de ajuda se pode dar ao aluno, sem fazer o trabalho por ele. Nesse sentido, apontaram como estratégia repetir a ideia do aluno, dando um reforço positivo:

> Eu acho que nós quando estamos a monitorizar, nós temos é que estar calados a maior parte das vezes. E esta técnica muitas vezes resulta (...) ele faz a pergunta e a gente repete a pergunta (...) se calhar estás a pensar bem ir por ali e a pessoa faz e eles dizem mais coisas, porque se tu dás (...) um juízo de valor, está bem ou está mal (...) eu acho que é das coisas que nós nos atrapalhamos mais quando estamos a monitorizar que é dar a resposta. (Professor José).

No terceiro momento da sessão, foi distribuído um conjunto de tarefas para o 7.º ano relacionadas com o tópico Sequências e regularidades (Anexo 5), sublinhando-se que era apenas uma proposta tendo o grupo a liberdade de as alterar ou propor outras. Sugeri que, depois de analisadas, selecionassem uma para explorarem tendo em conta a primeira prática do modelo das *5 práticas* (Stein et al., 2008), discutido anteriormente.

Durante a fase de trabalho autónomo, os professores começaram por resolver as tarefas, privilegiando a escrita do termo geral. Pensaram, também, em possíveis estratégias de resolução que os alunos poderiam seguir. De seguida, convidei os professores a apresentar as conclusões da sua exploração. Analisámos em coletivo as tarefas: *Cruzes às estrelas*, *Palitos* e *Cubos com autocolantes*, apesar da preferência dos professores recair sobre as duas últimas. A primeira tarefa tinha, na opinião do grupo, o inconveniente de surgir em contexto puramente matemático. Já a tarefa *Palitos* ficava a ganhar na medida em que favorecia a abordagem da simplificação de expressões algébricas: "Para além do termo geral, é fazer simplificação de expressões algébricas. É mostrar que expressões algébricas diferentes são todas iguais" (Professor José). A tarefa

Cubos com autocolantes beneficiava no aspeto em que permitia aos alunos analisar sequências que envolviam figuras tridimensionais.

Quanto às estratégias que os alunos poderiam seguir na exploração das diversas tarefas, os professores salientaram as estratégias com recurso ao desenho, à tabela e à escrita do termo geral. Esse momento foi aproveitado para sistematizar algumas das estratégias que os alunos podem usar no trabalho com as sequências, nomeadamente a estratégia de representação e contagem, a estratégia aditiva, a estratégia do objeto inteiro e a estratégia da decomposição dos termos, e discutir vantagens e desvantagens de cada uma dessas estratégias. Os professores consideraram que os alunos que geralmente recorrem à estratégia aditiva estabelecem generalizações erradas, que são formalizadas no tipo $n\ +\ padrão\ aditivo$:

> **Professora Cristiana:** Mas de figura para figura, eles começam-se a aperceber que de umas para as outras aumentam 3.
> **Professor José:** Mas sabes que os que pensam assim, depois têm muitos problemas no termo geral, dizem que o termo geral é $n+3$. Que o termo geral é $n+3$, não é? (2.ª SC_24 out 2013).

De todas as estratégias apresentadas anteriormente, a única que não foi apontada como usada pelos alunos foi a do objeto inteiro: "Não aparece muitas vezes" (Professora Ana).

A discussão das tarefas favoreceu, também, a partilha de ideias relacionadas com as estratégias que os alunos poderiam seguir para verificar se determinado elemento é ou não termo de uma sequência, já que nesse momento os alunos ainda não têm conhecimentos para resolver equações. Nesse sentido, a mais apontada foi a que recorre à operação inversa:

> Tens que somar 3 que dê 76, apesar de que não são 3 iguais, um deles tem 1 a mais, certo? Então ao 76 tira 1 que dá 75 e depois divide por 3. (...) Não é a estratégia mais prática, é pelas operações inversas, mas é assim que fazem ao princípio. (Professora Cristiana).

Na sequência da antecipação de possíveis estratégias a usar pelos alunos na abordagem às diversas tarefas, desafiei o grupo a pensar sobre uma provável ordem para a apresentação dessas resoluções. O grupo de professores baseou a sua sequência no grau de formalização das estratégias antecipadas, da menos formal para a mais formal.

3.ª sessão (2/12/2013): Esta sessão, inicialmente agendada para o dia 14/11, foi adiada em virtude de constrangimentos de horário resultantes da minha colocação.

A reunião teve início com uma breve referência ao trabalho desenvolvido no encontro anterior, recordando-se, em particular, as estratégias dos alunos mais frequentes no trabalho com as sequências. De seguida, convidei a professora Ana a partilhar com o grupo a sua experiência na condução das discussões matemáticas com turmas do 7.º ano, que emergiram da exploração das tarefas *Palitos* (Anexo 10) e *Cubos com autocolantes* (Anexo 10). Ana salientou que um dos momentos marcantes da discussão foi a dificuldade que os alunos sentiram na explicação do termo geral. Frisou que para os alunos é suficiente a escrita da expressão: "Escreveram o termo geral. (...) Aí era suposto eles terem dito mais qualquer coisa e eles não, não dizem nada". A discussão foi também decisiva no momento em que os alunos tiveram que explicar por que determinada expressão representava o termo geral da sequência em análise, relacionando a expressão com a figura subjacente à sequência apresentada: "Depois a pergunta 4, que era chegar a este termo foi terrível (...) porque para eles isto era uma fórmula e, portanto, não tentaram em altura nenhuma perceber que esta fórmula podia ter a ver com alguma coisa que estavam a ver".

Ana considerou que a tarefa *Cubos com autocolantes* foi mais rica no momento da discussão coletiva, devido ao aparecimento de diversas estratégias de resolução, o que não aconteceu na tarefa anterior − "Nesta aqui dos cubos é muito mais rica em termos de resoluções" − que na sua opinião se justificou pelo uso de figuras tridimensionais, um pouco mais distante do trabalho realizado em anos anteriores:

> Eu acho que esta aqui resultou de outra maneira (...) porque era uma figura no espaço. (...) Esta se calhar é mais próxima daquilo que eles estavam habituados, que eram palitinhos, não sei, eu acho que aqui foi um bocado para eles terem aquela ideia do andar à volta (...) eu acho que ali entenderam esta como uma coisa diferente não sei, talvez por isso, e não se preocuparam tanto em fazer logo os números, porque a partir do momento que eles aqui põem, põem os números que estão de palitos, eles aí pronto, aquilo já não dá, está a saltar de quanto em quanto, não vou tentar mais. (Professora Ana).

A professora refletiu sobre a desvantagem que têm os alunos em traduzir uma sequência pictórica por uma sequência numérica, já que a partir desse momento os alunos abstraem-se da configuração subjacente à construção e sua relação com a ordem da figura, para pensarem apenas em números e qual é o número que se adiciona ao primeiro termo para se passar ao segundo, e assim sucessivamente.

O momento seguinte da sessão foi dedicado à identificação das principais dificuldades dos alunos no trabalho com as funções. Para o grupo de professores, a noção de variável e a terminologia caraterística desse tópico, nomeadamente os conceitos de objeto e de imagem, são um entrave ao trabalho dos alunos. A simbologia associada a este tópico matemático é outra das dificuldades apontadas pelos professores, especialmente, lidar com a simbologia x, y, $f(x)$ e a compreensão do que representa a expressão $f(x) = y$: "Objeto e imagem. (...) A linguagem é toda horrível neste capítulo" (Professora Ana),

> Eu acho que a principal dificuldade tem a ver com a noção de variável e (...) a abstração que é o objeto e a imagem, e a própria escrita das funções por vezes é pesada com aquele f de x, não sei quê, umas vezes aparece escrito y igual a tal, outras vezes aparece x corresponde a este (...) e então aquela ideia de dar o x e descobrir o y e dar o y e descobrir o x é uma coisa que lhes custa muito. (...) E depois f espacinho igual a tal. (Professor José).

O grupo considerou, também, que o trabalho com as funções é facilitado quando são explorados com os alunos contextos reais, de forma a superar a dificuldade de compreensão de conceitos que são entes abstratos: "Com o contexto real eles vão lá, passar para objeto e imagem (...) se eu comprar duas peças de fruta quanto é que pago, mesmo que não seja uma proporcionalidade direta" (Professor Leandro). Face a esta situação, o grupo foi de opinião que este tópico matemático devia ser abordado com os alunos mais tarde, já que no 7.º ano de escolaridade ainda se revela muito abstrato para eles, principalmente, com o grau de formalização e abstração exigido pelo programa de Matemática (2013). Consideraram, também, ser benéfico para os alunos no trabalho com as funções privilegiar contextos não puramente matemáticos.

A última parte da sessão foi dedicada à análise de um conjunto de tarefas, propostas para os 7.º e 8.º anos, relacionadas com o tópico Funções (Anexo 6). Os professores organizaram-se em pequenos grupos para explorar as tarefas, tendo presente que era uma proposta que podia ser alterada. Após esse trabalho, o grupo escolheu uma tarefa para planificar, de acordo com o modelo das *5 práticas* (Stein et al., 2008). Para terminar, o grupo agendou a quarta sessão para o dia 9/1, pois a sua realização antes coincidia com o trabalho do final do 1.º período.

4.ª sessão (9/1/2014): O início desta sessão foi marcado pela partilha de experiências de práticas de discussão do professor Afonso, em consequência do trabalho dos seus alunos nas tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes*. Afonso comentou com o grupo, depois de ter passado pelos colegas cópias dos trabalhos dos seus alunos, as diversas estratégias de resolução que tinham surgido e a ordem pela qual os diversos grupos de alunos apresentaram, apoiado num documento em *powerpoint* que eu preparei para o efeito e em episódios em áudio. Este momento favoreceu, mais uma vez, a reflexão sobre a importância da sequenciação das intervenções dos alunos: "A ordem das apresentações é muito importante (...) porque deve-se ir das resoluções mais fracas até às melhores, não é? (...) Se o aluno que for, faz logo tudo completo, é o primeiro a acertar, todas as outras" (Professor José).

Este momento de partilha de experiências fez sublinhar a importância da discussão matemática na aprendizagem dos alunos, em particular na negociação de significados matemáticos. Consideraram, também, que este momento da aula é mais rico para os alunos do que a fase de trabalho autónomo: "E os sentidos que os miúdos fazem numa discussão entre uns e outros (...) é o momento onde, se calhar, se aprende mais e não no momento em que eles estão a trabalhar em grupo" (Professor José), "E até percebem mais" (Professora Cristiana).

Relativamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico, voltou a refletir-se sobre a importância de os alunos relacionarem a construção subjacente a uma dada sequência com o número da figura para a escrita e explicação de termos gerais, em detrimento da escrita mecanizada do termo geral em função do padrão aditivo, quando a sequência que está em causa corresponde a uma progressão aritmética. Este procedimento automatizado dificulta o trabalho do aluno na análise de sequências de outros tipos.

A sessão de trabalho continuou com uma breve referência às principais dificuldades dos alunos no trabalho com as funções, discutidas na sessão anterior. De seguida, distribuí uma tarefa relacionada com a função afim e a função linear (Anexo 7), retirada da Brochura Álgebra no Ensino Básico (Ponte et al., 2009), para que antecipassem possíveis estratégias de resolução a usar pelos alunos. Depois de analisarem com cuidado a representação gráfica apresentada na tarefa, os professores concordaram que a designação do eixo das ordenadas ficaria mais clara para os alunos se em vez de distância percorrida indicasse distância ao ponto de partida. Essa sugestão decorreu do facto da ordenada na origem da reta designada pela letra B ser 200. Contornada essa questão, e depois de feita a alteração sugerida, os professores mencionaram como possíveis estratégias de resolução a leitura do gráfico, o recurso a uma tabela e a escrita da expressão algébrica. No caso das duas últimas, o grupo considerou que surgiriam, previsivelmente, valores que não favorecessem a sua leitura imediata através da representação gráfica.

A sessão continuou com a exploração das propostas de tarefas distribuídas no encontro anterior e posterior partilha das principais conclusões resultantes do trabalho nos diversos grupos. Foram selecionadas as tarefas *Multas na biblioteca*, *Inscrição no ginásio* e *Quentes e boas!* para exploração. Os professores apresentaram propostas de reformulação do enunciado para as duas últimas, de modo a facilitar o envolvimento dos alunos na sua resolução. No caso particular da tarefa *Inscrição no ginásio*, os professores consideraram que era muito aberta, sendo preferível alterá-la de forma a conduzir os alunos mais eficazmente à conclusão pretendida: a escolha do ginásio dependia do tempo de permanência:

> Nós decidimos fazer algumas alterações às questões (...) começávamos por colocar a questão 3 em primeiro lugar que era uma pergunta mais direta, ao fim de quantos meses é que eles teriam (...) gasto em cada um dos ginásios. (...) Achámos que essas duas primeiras perguntas não estavam muito explícitas. (...) Orientar um bocadinho para eles perceberem que teriam mesmo que ver se está 3 meses qual é que compensava, se estivesse 1 ano qual é que compensava. Portanto, foi essa a ideia de colocarmos no início, tendo em conta o tempo de frequência. (Professora Isaura).

Contudo, na opinião do professor Leandro essa alteração não se justificava, já que era esse o objetivo da tarefa: "Eu acho que é mesmo essa a intenção. Para eles perceberem". A natureza das tarefas a apresentar aos alunos depende muito do tipo de trabalho que os professores estão habituados a desenvolver com as suas turmas.

O grupo que explorou a tarefa *Multas na biblioteca* justificou a sua opção pelo facto de favorecer a passagem das sequências para as funções de uma forma muito natural e responder ao desafio lançado pelo programa ao sugerir essa abordagem: "E pode ser para dar o salto das sequências para as funções, este pode ser um exemplo" (Professor Leandro).

Para concluir o trabalho nesta sessão, o grupo decidiu que uma data favorável para a realização da sessão seguinte seria o dia 23/1.

5.ª sessão (23/1/2014): A quinta sessão foi dedicada ao tópico Equações. Desafiei os professores a refletir sobre as principais dificuldades e os erros mais frequentes dos alunos no trabalho neste tema. A partilha de experiências fez sobressair erros relacionados com procedimentos − "Quando resolvem uma equação com denominadores e têm o menos atrás da fração, é, pronto, não percebem que afeta"

(Professor Afonso); “Mas com o menos antes do parêntesis também é a mesma coisa” (Professor José); “É como: menos com menos dá mais” (Professora Ana) − e com a escrita de equações a partir de situações dadas em linguagem natural, principalmente, em tarefas envolvendo idades: “Traduzirem linguagem corrente para matemática. Eles próprios dizem que é mais difícil. Até chegar à equação. (...) Então, e se formos para as idades?” (Professor Afonso).

A preocupação dos professores face a estes erros tão comuns nos alunos levou-os a refletir sobre as suas causas e a levantarem questões como: Será que nunca aprenderam, ou aprenderam e esqueceram-se?, devido às suas repercussões em anos futuros: “Os erros são realmente os fundamentos da Álgebra, a nível do básico” (Professora Ana).

Na sequência dessa reflexão, distribuí ao grupo de professores um quadro síntese dos erros e das dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau (Anexo 8), retirado da Brochura Álgebra no Ensino Básico (Ponte et al., 2009). O documento foi comentado pelos professores, de acordo com as suas experiências em sala de aula. Salientaram como mais comuns os erros: adição incorreta de termos não semelhantes, justificado pelo facto de os alunos considerarem que x representa o número 1 − “O x mais 8 que dá 9 (...) veem muito o x como vale 1” (Professora Cristiana) – adição incorreta de termos semelhantes, principalmente quando os monómios são simétricos, – “Mas $3x - 3x$ dá x . (...) Tem que dar sempre x igual a” (Professor Afonso) – transposição incorreta de termos – “$-2x = 4$, ter $x = 4 + 2$” (Professora Inês) – muito associada à fraca compreensão da ideia referida pela professora Cristiana “Muda de membro, muda de sinal” – e a conclusão incorreta da resolução de uma equação.

Na última parte da sessão, convidei os professores a analisar duas propostas de tarefas relacionadas com o tópico Equações: *Magia ou matemática*? e *O cavalo e a mula*, do conjunto de tarefas propostas para o tópico Equações (Anexo 9). As tarefas foram exploradas em pequenos grupos, em termos de possíveis estratégias que os alunos podiam seguir na sua resolução e dificuldades que podiam enfrentar. Antes de se dar por terminado mais um encontro, foi agendada para o dia 13/2 a sessão seguinte.

6.ª sessão (13/2/2014): A sessão teve início com a partilha das experiências dos professores Afonso e Jorge na condução de discussões coletivas, resultantes do trabalho dos alunos nas tarefas *Funções e Futebol*, *Eleição do delegado de turma* e *Sacos e bolas* (Anexo 10). Relativamente à primeira, os professores começaram por apresentar a tarefa ao grupo de colegas, uma vez que não tinha sido preparada e discutida nas sessões conjuntas do grupo de formação, alertando para o objetivo da mesma: analisar a influência dos parâmetros m e b nas funções do tipo $y = mx + b$. Frisaram que era uma tarefa que recorria ao uso da calculadora gráfica, motivo que despertou bastante entusiasmo nos alunos, porque como referiu o professor Afonso "eles nunca tinham visto uma gráfica". O envolvimento dos alunos na tarefa foi outro aspeto muito positivo salientado pelos professores.

Dada a estrutura da tarefa (organizada em desafios), os professores mencionaram que optaram por fazer a discussão por partes:

> Decidimos fazer a discussão em vários momentos da aula, porque a tarefa era constituída por diversos desafios. Em alguns desafios os alunos usavam a calculadora gráfica para analisar a influência do declive e da ordenada na origem numa função afim e noutros recorriam ao cálculo algébrico para verificar se determinado ponto pertencia ou não a uma reta. Com esta tarefa, os alunos estudaram, também, algumas característica de retas paralelas. (NC_13/2/14).

Quanto à tarefa *Eleição do delegado de turma*, adaptada da tarefa discutida na primeira sessão conjunta, os professores começaram por partilhar com o grupo as estratégias que foram levadas à discussão coletiva:

> As estratégias que surgiram e que foram apresentadas no momento da discussão, por esta ordem, foram as estratégias com recurso a uma tabela e a equações. No caso da estratégia que recorreu a equações, a incógnita representou informações diferentes, de acordo com os dados do enunciado. A partilha dessas estratégias evidenciou que um problema pode ser traduzido por diversas equações, mas a resposta ao problema é a mesma. O professor Jorge sublinhou que no seu caso apareceu uma outra estratégia que foi apresentada antes da resolução que recorria à tabela, por ter recorrido à linguagem natural. (NC_13/2/14).

A tarefa *Sacos e bolas* também foi apresentada ao grupo por não ter sido partilhada previamente com o conjunto de professores. Começaram por esclarecer que a opção por essa tarefa se ficou a dever ao seu nível de dificuldade superior relativamente à anterior (NC_13/2/14). Dessa forma, a tarefa foi explorada com os alunos após a tarefa *Eleição do delegado de turma*.

No que se refere às práticas selecionar e sequenciar, os professores referiram as estratégias e a ordem que escolheram para as levar à discussão:

> O professor Afonso referiu que na sua turma, foram partilhadas em coletivo apenas estratégias que recorriam à escrita de uma equação, apesar da incógnita representar dados diferentes. O professor Jorge mencionou que na sua turma,

> foram levadas, por esta ordem, à discussão coletiva estratégias que recorreram à tabela e à escrita de uma equação, também com a incógnita a designar informação distinta. Salientou, ainda, que uma das equações que surgiu na turma não tinha sido previamente antecipada, sublinhando a importância de se lidar com situações imprevistas e a vantagem do trabalho de preparação de uma discussão ser feito em conjunto com outros colegas, embora tenha consciência que nem sempre se conseguem prever todas as estratégias. Os professores frisaram que esta tarefa permitiu aos alunos perceberem, mais uma vez, que um problema pode ser traduzido por diferentes equações, cada uma com a sua solução, mas com a mesma resposta ao problema. (NC_13/2/14).

A sessão continuou com o convite ao grupo para partilha das principais ideias que resultaram da exploração das tarefas distribuídas na sessão anterior. O conjunto de professores debruçou-se, especialmente, sobre a tarefa *O cavalo e a mula*, pelo seu nível de desafio. Referiram que numa primeira fase do trabalho discutiram o momento em que seria mais adequado apresentar a tarefa aos alunos (antes ou depois da introdução do conteúdo sistemas de equações), analisando vantagens e desvantagens de cada opção, sem chegarem a um consenso: "Não chegámos a conclusão nenhuma (...) se antes ou depois. (...) Acho que era interessante, a primeira parte, apresentar no início, até para ver o que eles faziam" (Professora Leonor). Paralelamente a esse trabalho, identificaram algumas estratégias de resolução possíveis de usar pelos alunos:

> **Professora Alice:** A nossa discussão foi também quando apresentá-la (...) se apresentarmos depois de dar os sistemas, se calhar, é mais pacífico, se for antes pode ser mais difícil. E dá-me ideia que eles iriam (...) por tentativas. (...)
> **Professora Cristiana:** Ou então escrever equações, mas escrevendo uma variável em função da outra, só com uma equação e não com um sistema. (6.ª SC_13 fev 2014).

Os professores mostraram-se muito reticentes em explorar esta tarefa com os seus alunos, devido ao enunciado da própria proposta, que não era de fácil tradução para linguagem matemática: "Eles desmotivam sempre, porque (...) a própria tradução para a linguagem matemática eu acho que é logo" (Professora Sara). Essa dificuldade fez refletir sobre a importância da interpretação e compreensão dos enunciados das tarefas e o papel que o professor pode desempenhar a esse nível, focando a atenção dos alunos em frases ou palavras chave: "Olha bem para esta frase, o que ela quer dizer?" (Professor Jorge).

A tarefa foi muito discutida pelos professores, nomeadamente, o seu nível de dificuldade, levando alguns professores a considerarem ser proveitoso a alteração do enunciado, de modo a facilitar a sua tradução de linguagem natural para linguagem matemática:

> **Professor José:** Podia haver uma das equações com x igual a qualquer coisa. (...)
> **Professora Leonor:** Uma ter já uma variável fixa. (...)
> **Professor José:** Uma fosse o dobro da outra (...) uma mais sofisticada e a outra muito mais simples, não é? Essa coisa de ser mais um igual a menos 1 do outro não é uma coisa muito fácil. (6.ª SC_13 fev 2014).

De seguida, foi distribuído aos professores um conjunto de tarefas relacionadas com o tópico Equações, para os 7.º e 8.º anos de escolaridade. Incitei os professores a explorar as tarefas e a preparar uma delas, de acordo com o modelo das *5 práticas* (Stein et al., 2008). Para dar por concluída a sessão de trabalho, o grupo agendou a sessão seguinte para o dia 20/3.

7.ª sessão (27/3/2014): Esta sessão decorreu uma semana após a sua marcação, em virtude da necessidade de realização de uma reunião de departamento do grupo de professores.

O início desta sessão conjunta foi marcado pelo convite aos professores Jorge e Afonso para partilharem com os colegas as suas experiências na condução das discussões que decorreram da exploração das tarefas *O retângulo num quadrado* e *O cavalo e o burro* (Anexo 10). Relativamente à primeira, os professores depois de a apresentaram ao grupo por não ser sua conhecida, destacaram as resoluções que surgiram (recurso à tabela e ao sistema de equações) e a ordem pela quais foram apresentadas: "A razão da escolha da sequência teve a ver com (...) as mais pobres dígamos assim, são aquelas que escolhemos logo para o início" (Professor Jorge). O professor Afonso salientou que todos os seus alunos recorreram ao sistema de equações, para a resolução do problema.

Os professores frisaram o envolvimento dos alunos na tarefa: "Eles trabalharam muito autonomamente nesta primeira atividade, não tiveram muita dificuldade (...) teve algum envolvimento dos alunos" (Professor Jorge). O professor Cláudio, que também explorou a tarefa com os seus alunos, reforçou essas ideias, sublinhando o quanto positivo foi o trabalho dos alunos em sala de aula − "foi uma experiência espetacular, realmente conseguimos ter todos, mesmos os maus alunos a tentar fazer, a envolverem-se e isso já me levou a fazer outras experiências" − mostrando apenas a sua preocupação com a compatibilidade entre o tempo exigido nessas aulas e o cumprimento do programa − “Agora, não sei se seria possível num ano inteiro com todas as matérias que temos que dar conseguirmos fazer isto. (...) Porque depois ficamos por metade no programa.”. Realçou que o sucesso da tarefa se ficou a dever, também, ao acompanhamento que fez na fase de monitorização, ao focar a atenção dos alunos em aspetos essenciais: “Circulava entre os grupos e dizia (...) lê a primeira frase (...) de certeza que vos dá uma equação. Tentem interpretar” (Professor Cláudio).

Este momento de partilha de experiências permitiu refletir, mais uma vez, sobre a importância de se ter os alunos envolvidos na fase da discussão coletiva, que se consegue com tempo e com a participação ativa e responsável dos alunos nessa parte da aula:

> **Investigadora:** Para relacionarem com as suas ideias, com conhecimentos prévios que eles têm, tentarem procurar pontos entre aquela resolução e a deles. (...)
> **Professor José:** A experiência que eu tenho relativamente a isso, eu acho que isso tem muito a ver com o hábito. (...) Quando nós tínhamos a turma piloto (...) no 7.º ano aquilo não corria muito bem e depois como foram 3 anos, com a continuação aquilo começou a achar que aquilo era o momento certo e ouvir os colegas era uma coisa que era normal (...) fazia parte da aprendizagem. Mas não foi fácil de levar à prática mas isso já é ao fim de muito (...) batalhar (...) ouvir uns aos outros e a fazer perguntas uns aos outros. (7.ª SC_27 mar 2014).

Na tarefa *O cavalo e o burro*, os professores destacaram como estratégia de resolução mais frequente o recurso ao sistema de equações, apesar do professor Jorge ter salientado que também teve um grupo que trabalhou com uma equação em vez de um sistema: “A equação foi feita de trás para a frente”. Como já era esperado, devido ao seu nível de dificuldade mais elevado, os professores referiram que no momento de trabalho autónomo os alunos apresentaram dificuldades: “Esta aqui a sensação que tive é que de facto tive de dar mais ajuda, tive que estar mais perto deles, estavam um bocado perdidos” (Professor Jorge), “Havia lá uma situação “a minha carga seria o dobro da tua”. Eles teriam que pôr o dobro e depois a carga seria menos 1, não é? E eles punham muitas vezes (...) só a carga inicial” (Professor Afonso).

A professora Inês contou que apresentou a tarefa *O cavalo e a mula* (Anexo 9) aos seus alunos do 7.º ano, tendo como estratégias de resolução a tentativa e erro e o uso da linguagem natural:

> A maior parte fez por tentativas. (...) Eu sei que o burro tem que ser maior que o cavalo (...) mas também sei que só pode ser dois sacos a mais para depois eu

> tirar o saco ao burro (...) e puser o saco no cavalo der o mesmo resultado. (...) Se eu tirar um saco ao cavalo e puser no burro, o burro vai ter o dobro. Também sei que tem que ser números ímpares para depois quando eu acrescentar um saco dar números pares e com estes dados fui contando. (Professora Inês).

A sessão prosseguiu com a continuação da exploração das tarefas distribuídas na sessão anterior. A preferência dos professores recaiu sobre as tarefas *Certo é dinheiro*, *Família Melo* e *A cantina da escola*.

A partilha em coletivo das principais ideias que resultaram do trabalho do grupo sobre essas tarefas evidenciou diversas preocupações: que estratégias poderiam usar os alunos na sua resolução e que adaptações fazer às tarefas:

> A primeira tarefa favorece o aparecimento de diversas estratégias de resolução, nomeadamente, o recurso a uma tabela, à interpretação da informação em linguagem natural (definir cada uma das informações a partir da primeira) e à tradução por equação. No caso das outras tarefas, os professores consideram que os enunciados das propostas ficam a ganhar se a informação dada contemplar todas as operações aritméticas. Quanto à antecipação de estratégias, os professores focam a estratégia por tentativa e erro e escrita de uma equação. Neste último caso, podem surgir diversas designações para a incógnita. (NC_27/3/14).

Ao concluir mais um encontro de partilha e discussão de experiências, o grupo considerou que seria vantajoso agendar as três sessões restantes, a realizar em 8/5; 15/5 e 12/6.

O grupo, na voz do professor José, dirigiu-me o pedido de disponibilizar parte da sessão do dia 8 e a sessão do dia 15 para trabalho autónomo deles, por considerarem ser difícil encontrarem-se fora desses momentos para refletirem sobre as suas experiências de sala de aula na condução de discussões. Dessa troca de ideias nasceria um documento escrito com o produto dessa partilha, que seria um dos elementos de avaliação da oficina de formação. A proposta pareceu-me ter potencialidades, na medida em que seria mais um momento de reflexão entre todos e que ficaria registada. Essas sessões, também, tinham a particularidade de decorrerem sem a minha presença, o que poderia favorecer um outro tipo de reflexão, já que estariam em ambiente natural sem a mínima influência da formadora/investigadora nesse processo.

8.ª sessão (8/5/2014): Esta sessão teve início com o convite à partilha das práticas de discussão dos professores Ana e Afonso, em consequência da exploração das tarefas *Inscrição no ginásio*, *Família Rosa* e *A cantina da escola* (Anexo 10) com os seus alunos. As suas reflexões foram apoiadas na visualização, em vídeo, de pequenos episódios das aulas e num documento, em *powerpoint*, com as resoluções que foram levadas à discussão coletiva, que preparei para o efeito, apesar do professor Afonso distribuir pelos colegas cópias dos trabalhos dos seus alunos.

Os professores referiram, que na primeira tarefa, a grande dificuldade dos alunos foi a definição da escala para a elaboração do gráfico, uma vez que os alunos tinham que trabalhar com informação proveniente de duas fontes diferentes – dois ginásios: "Esta, contrariamente ao que se estava a pensar, a grande tragédia das crianças, a primeira pergunta, preencheram mais ou menos a tabela e depois o problema foi na segunda que era, que era fazer o gráfico por causa da escala" (Professora Ana).

Na escrita da expressão algébrica que traduzia cada uma das situações, os alunos não tiveram dificuldade e usaram os seus conhecimentos prévios do trabalho com sequências: "Não, não, o problema foi a fazer o gráfico. O resto foi mais pacífico. Eles associaram muito isto ao trabalho das sequências" (Professora Ana).

Esta tarefa reforçou a opção por se abordar as sequências previamente às funções: "Mas a ideia de dar as sequências antes acaba, porque facilita um bocadinho" (Professor José), "É, porque eles acabam por perceber" (Professora Ana).

O professor Afonso acrescentou, ainda, que o momento de discussão fez surgir a associação das expressões que tinham escrito para representar cada uma das situações ao tipo de função em causa: "Eles põem mesmo na última questão a função afim, $y = kx + b$. Escrevem mesmo". A análise do vídeo com um dos episódios da aula do professor Afonso fez notar o envolvimento dos alunos na discussão, nomeadamente, no acompanhamento das ideias que estão a ser partilhadas, já que um aluno na sequência da apresentação dos seus colegas introduz uma situação fictícia que os leva a concluir que a escolha do melhor ginásio depende do tempo de permanência.

Quanto à tarefa *A cantina da escola*, as resoluções apresentadas pelos alunos envolviam estratégias com recurso a uma tabela e à escrita de uma equação, com a incógnita a representar informação diferente. Esta última estratégia de resolução fez surgir equações distintas e com potencialidades também diversas: "Com parêntesis, com denominadores" (Professora Ana). No que respeita a esta resolução, o professor Afonso acrescentou, ainda, que na sua turma apesar da incógnita também representar dados diferentes, surgiu também uma equação que evidenciou um tratamento distinto da informação, já que havia um dado que era conhecido à partida: "Consideraram menos um dia que foi a sexta-feira". Para concluir, a professora Ana destacou apenas que a estratégia que recorreu à tabela tinha a particularidade de apresentar um raciocínio bastante organizado, muito diferente da pura tentativa.

Na perspetiva dos professores, a tarefa *A família Rosa* suscitou algumas dificuldades de interpretação aos alunos. Contudo, referiram que já estavam à espera, devido ao nível de dificuldade na tradução da informação dada. Em termos de estratégias de resolução, os alunos utilizaram, essencialmente, dois tipos de estratégias:

> Os alunos da professora Ana recorreram a uma tabela para registo das tentativas e à tradução por equação, com a incógnita a assumir designações distintas. Na turma do professor Afonso surgiu, apenas, a estratégia de resolução através de uma equação mas, também neste caso, a incógnita a representar informação diferente. (NC_8/5/14).

O professor Afonso destacou que esta tarefa foi importante para os alunos compreenderem que o mesmo problema pode ser traduzido por equações diversas, cada uma com a sua solução, obtendo, no entanto, a mesma resposta ao problema: "O que enriqueceu aqui foi que eles resolveram de duas formas: uns consideraram o x a idade da Maria e outros consideraram a idade da Sara. Deu resultados diferentes, mas a resposta era a mesma".

O tempo restante da sessão foi dedicado ao trabalho autónomo do grupo de professores.

9.ª sessão (15/5/2014): A penúltima sessão foi dedicada ao trabalho autónomo dos professores, para elaboração de uma reflexão acerca das suas experiências de sala de aula na condução de discussões coletivas.

10.ª sessão (12/6/2014): A última sessão foi organizada em dois momentos. No primeiro, os professores, de forma breve, apresentaram o produto do seu trabalho autónomo, referindo em particular as tarefas escolhidas, as resoluções que foram partilhadas em coletivo e a respetiva ordem.

No segundo momento, preencheram dois questionários: um dado pelo centro de formação, que visava fazer uma avaliação da oficina de formação e outro elaborado por mim, com vista a recolher as perspetivas dos professores relativamente ao trabalho desenvolvido ao longo das várias sessões conjuntas. Em especial, pretendi conhecer as suas perspetivas relativamente aos contributos do trabalho realizado para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional e da condução de discussões matemáticas em aulas em que se ensina Álgebra. Optei por questionários anónimos, de modo a garantir um maior à vontade dos professores na partilha das suas perspetivas.

Ao terminar a sessão, agradeci o envolvimento dos professores em todas as fases do trabalho e os momentos ricos de partilha de experiências que me proporcionaram ao longo de todo o período de tempo em que estivemos juntos, num ótimo clima de colaboração mútua. Os professores retribuíram e agradeceram a oportunidade que lhes foi dada para refletirem sobre questões muito ligadas à sala de aula (tarefas, discussão matemática e Álgebra), porque ultimamente as aprendizagens de formação que tinham desenvolvido estavam mais relacionadas com a tecnologia. Salientaram a particularidade desta oficina se ter preocupado com questões muito ligadas ao seu dia-a-dia na escola.

Balanço do trabalho desenvolvido na oficina de formação

No decorrer da oficina de formação foi evidente o envolvimento de todos os professores na realização do trabalho proposto, num agradável ambiente de colaboração mútua. O trabalho realizado ao longo das diversas sessões foi constantemente negociado com o grupo de professores.

As perspetivas dos professores

A perspetiva dos professores, focada nos seus relatórios e nos questionários, relativamente ao trabalho desenvolvido na oficina de formação está organizada nos seguintes parâmetros: contributos para o desenvolvimento do conhecimento profissional, importância da promoção da discussão matemática no desenvolvimento do pensamento algébrico e relação da discussão matemática com os temas do currículo.

Globalmente, o conjunto de professores considerou que o trabalho realizado na oficina de formação contribuiu para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional, na medida em que favoreceu a reflexão sobre as práticas letivas − “Sim, na medida em que observando as práticas usadas pelos vários docentes, os métodos usados para introdução de novos conteúdos, fazem-nos refletir sobre a nossa forma de dar as aulas aos nossos alunos” (QA_12 jun 2014) − onde valorizaram a partilha de experiências através da análise de episódios apresentados em vídeo: “Os temas e o modo como se discutiram tendo por base episódios de aulas filmados em vídeo e relatados pelos professores que as lecionaram foram um suporte adequado para tornar estas sessões muito interessantes e enriquecedoras para as nossas práticas letivas” (QA_12 jun 2014).

Focando elementos essenciais da prática letiva, os professores destacaram a contribuição do trabalho desenvolvido para a seleção e preparação de tarefas para a sala de aula − “Muitas vezes o sucesso de uma aprendizagem começa com a escolha criteriosa de uma tarefa e com uma boa planificação da sua exploração matemática” (Professora Telma RI_jul 2014) − com vista ao desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos: “Deverão conter ideias matemáticas importantes, proporcionar discussões ricas do ponto de vista do raciocínio matemático permitindo vários tipos de abordagem” (Professora Ana RI_jul 2014).

A professora Leonor alertou para a importância da antecipação de respostas na preparação das aulas: “É importante colocarmo-nos no papel do aluno e prevermos as várias possibilidades de resposta/ resolução, uma vez que assim a preparação da aula se torna mais eficaz” (RI_jul 2014).

De forma a garantir o envolvimento dos alunos na realização de uma tarefa, os professores referiram que, quando estão a preparar uma aula, é fundamental escolher o modo de trabalho dos alunos mais adequado à concretização do trabalho:

> Pensar na organização da turma: trabalhar a pares ou em grupo, permitir ou não que os alunos escolham os parceiros. É sobretudo importante que exista algum bem estar nos pequenos grupos e na turma de um modo geral, com vista à promoção de um ambiente estimulante e favorável à participação dos alunos. (Professora Ana RI_jul 2014).

Ainda no que se refere aos contributos para o conhecimento da prática letiva, a condução de discussões matemáticas foi outro elemento muito valorizado pelos professores, quer relativamente à sua preparação, quer para o seu desenvolvimento em sala de aula.

Em relação à preparação da condução de uma discussão, o foco centrou-se na antecipação de questões a colocar aos alunos e de possíveis estratégias de resolução, de forma a ajudá-los a desenvolverem uma melhor compreensão dos assuntos em estudo:

> Cabe ao professor organizar as questões a colocar aos alunos e sobretudo decidir como orientar as discussões em sala de aula para que seja evidenciada e compreendida a matemática subjacente em cada tarefa. (...) Para isso, caberá ao professor ou, preferencialmente, grupos de professores planificar

> cuidadosamente este tipo de aulas, antecipando as várias resoluções que poderão surgir. Devo confessar que, depois do trabalho desenvolvido nesta ação, passei a ter uma maior preocupação com a previsão das resoluções dos alunos e sou muitas vezes surpreendida com a variedade de abordagens em algumas tarefas! (Professora Ana RI_jul 2014).

Na condução da discussão em sala de aula, os professores sublinharam o quão importante é escolher as ideias dos alunos a serem partilhadas e a sua ordem, de forma a promover a aprendizagem dos alunos: "O modo como organizamos as discussões das tarefas pode realmente fazer a diferença entre fazer um desfile de resoluções sem interesse ou um momento alto de aprendizagem dos alunos de uma matemática rica e significativa" (Professor José RI_jul 2014). Esse momento permite aos alunos analisarem e compararem as ideias matemáticas em jogo: "A discussão sobre as diferentes formas de apresentar uma solução leva a que todos os alunos possam pensar o porquê das várias apresentações e verificarem se a resolução dos colegas está ou não correta" (Professor José RI_jul 2014).

A perspetiva dos professores relativamente à gestão desse momento em sala de aula evidenciou a exigência dessa tarefa, fundamentalmente, no garantir do envolvimento dos alunos − "Neste tipo de aulas é sempre complicado gerir o entusiasmo de alguns e o desencanto de outros" (Professora Ana RI_jul 2014) – e no apoio a dar aos alunos para os fazer avançar na discussão: "O que o professor não deve fazer ou dizer na discussão coletiva, como por exemplo, cortar o raciocínio ao aluno" (Professora Ana RI_jul 2014).

Os professores mencionaram, também, o contributo do trabalho realizado para o aprofundamento do seu conhecimento matemático, principalmente, no que se refere à Álgebra: "Ajudou a desenvolver e a preparar melhor os conteúdos algébricos" (QA_12 jun 2014).

As aprendizagens realizadas ao longo da formação revelam a importância de o professor refletir sobre a aprendizagem dos alunos, em especial, para o desenvolvimento do pensamento algébrico: "Ajudou-me a refletir um pouco mais sobre as dificuldades dos alunos relativamente à álgebra"; "Permitiu-me pensar e refletir sobre a forma como os alunos do 3.º ciclo pensam algebricamente, como evoluem na utilização e manipulação de letras" (QA_12 jun 2014).

O trabalho realizado apoiou, também, os professores na utilização de documentos curriculares, nomeadamente as Metas curriculares: "O trabalho de grupo desenvolvido permitiu-me ter uma visão mais clara do que se pretende com as Metas Curriculares" (Professora Leonor RI_jul 2014). Assim, a natureza do trabalho proposto na oficina de formação favoreceu a mudança de práticas: "Permitiu a aplicação de novas estratégias na sala de aula com vista à melhoria da aprendizagem dos alunos" (QA_12 jun 2014).

A perspetiva dos professores relativamente ao trabalho desenvolvido na oficina de formação foi bastante positiva e evidenciou aprendizagens relevantes que contribuíram para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional. Em especial, para a dimensão do conhecimento da prática letiva destacaram a importância da seleção de tarefas matematicamente significativas; da preparação dessas tarefas para exploração em sala de aula, prevendo dificuldades que os alunos podiam enfrentar na sua resolução; da definição do modo de trabalho dos alunos e da forma como conduzir a discussão coletiva com vista à aprendizagem matemática, antecipando possíveis ideias a discutir e a melhor forma de as organizar. As aprendizagens relativas às dimensões do conhecimento matemático e curricular também foram referidas pelos professores e culminaram em aprendizagens referentes à dimensão do conhecimento do aluno e da sua aprendizagem. O enriquecimento dos professores no desenvolvimento do pensamento algébrico e das ideias preconizadas nos documentos curriculares foram mobilizadas na exploração que fizeram das tarefas, fundamentalmente, nas adaptações que foram propondo às tarefas e nas dificuldades dos alunos que foram apontando.

A promoção de discussões matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico foram elementos estruturantes do trabalho desenvolvido na oficina de formação. A esse nível, os professores consideraram que o envolvimento dos alunos em discussões matemáticas favoreceu o aparecimento da linguagem algébrica − "No caso de resolução de problemas em que podem ser usadas (equações, sistemas, inequações) por exemplo, é bastante benéfico para os alunos que têm "aversão" às letras uma vez que lhes facilita a interpretação de problemas facilitando assim a resolução do mesmo" (QA_12 jun 2014) – a compreensão de noção de variável e o desenvolvimento da capacidade de generalização:

> Acredito que através de discussões matemáticas em que se possibilita a intervenção dos alunos e em que são analisadas as resoluções de tarefas com vários graus de abstração, os alunos têm a possibilidade de comparar e enriquecer o seu modo de equacionar os vários problemas, levando-os a

melhorarem o seu poder de abstração e a sua noção de variável. (QA_12 jun 2014).

Os professores consideraram que a discussão matemática é fundamental no trabalho em Álgebra e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Contudo, referiram que existem outros temas matemáticos que também são suscetíveis de serem ensinados criando dinâmicas de discussão matemática coletiva. As discussões matemáticas em torno de tarefas relacionadas com a Organização e tratamento de dados favorece a partilha de diversas estratégias de resolução, no caso específico das probabilidades − "devido aos vários processos que se pode utilizar na sua resolução" (QA_12 jun 2014) – e a compreensão de conceitos, a propósito das ideias estatísticas: "Na maioria das vezes, os alunos aprendem mecanicamente o que é a média, por exemplo, sem conhecerem verdadeiramente o seu significado" (QA_12 jun 2014).

Para outros, a promoção de discussões está relacionada com a natureza das tarefas e o seu nível de desafio, não sendo característica de nenhum tema matemático em especial − "Qualquer tema matemático permite grandes discussões, no entanto todos aqueles que envolvem maior raciocínio levam a formas diferentes de apresentar soluções pelo que permitem maior discussão" (QA_12 jun 2014). A forma como as tarefas são exploradas em sala de aula foi também mencionada como um fator decisivo para a existência e a qualidade de uma discussão: "Acho que a natureza das tarefas e o modo como elas são aplicadas é que podem ou não favorecer as discussões. Tarefas rotineiras e muito fechadas raramente favorecem discussões ricas e interessantes do ponto de vista matemático" (QA_12 jun 2014).

A condução de discussões matemáticas é reconhecida pelos professores como um instrumento de aprendizagem em qualquer tema matemático, ao favorecer a partilha e justificação de ideias e a negociação de significados matemáticos.

Dificuldades encontradas no decorrer da oficina de formação

Ao longo do percurso foram encontradas algumas dificuldades, que pareceram naturais quando um grande grupo de professores se envolve, em conjunto, num certo desafio, onde é necessário conciliar diversos interesses pessoais e profissionais.

O horário de realização das sessões conjuntas foi, sem dúvida, um fator condicionante, principalmente, no período de inverno. As sessões, com uma duração de três horas, decorreram no final de um dia de trabalho e já no final de uma semana, onde o cansaço de todos os participantes foi evidente. Contudo, o ambiente em que decorreram as sessões, pautadas pelo espírito de colaboração, e a própria natureza do trabalho proposto, com grande incidência na partilha de experiências e na preparação de materiais para a sala de aula, ajudou a superar as adversidades.

O cumprimento dos programas e a consciência que a condução de uma discussão matemática coletiva exige tempo de preparação e de dinamização, foi outro dos entraves à introdução mais sistemática nas práticas dos professores, principalmente daqueles que não faziam parte dos estudos de caso desta investigação.

O trabalho colaborativo

O grupo colaborativo

O grupo colaborativo do estudo (os três professores e a investigadora), como já foi explicado, foi constituído dentro do grupo de 15 professores que participaram na oficina de formação *Práticas da discussão matemática e desenvolvimento do pensamento algébrico*, em resultado do pedido dirigido por esses professores.

A colaboração com estes três professores (Ana, Jorge e Afonso) incluiu para além do trabalho realizado nas sessões conjuntas de formação, a preparação, acompanhamento e reflexão de aulas em que os professores dinamizaram discussões coletivas com tarefas algébricas. Assim, algum do trabalho realizado pelo grupo colaborativo nas sessões de formação foi distinto do dos restantes colegas e estendeu-se para além do trabalho concretizado nessas sessões conjuntas de formação.

De seguida, apresento parte do trabalho realizado pelo grupo colaborativo nas sessões conjuntas e para além dessas sessões, que incidiu, fundamentalmente, na preparação de tarefas para a sala de aula com foco na promoção da discussão matemática.

O trabalho realizado nas sessões conjuntas

O trabalho realizado pelo grupo colaborativo nas sessões conjuntas baseou-se, à semelhança do grupo de formação, na análise de um conjunto de propostas com vista à identificação de tarefas com potencialidades para exploração em sala de aula e preparação das tarefas escolhidas, com incidência no momento da discussão.

Na terceira sessão conjunta entreguei aos professores um conjunto de propostas relacionadas com o tema das Funções (Anexo 6). Depois de uma breve leitura, o grupo mostrou interesse pelas tarefas *Calorias ao dia*, *O melhor alarme* e *Inscrição no ginásio*. Na exploração que fez das tarefas o grupo seguiu a metodologia: resolver as tarefas e, posteriormente, pensar em adaptações para as mesmas.

A primeira tarefa, escolhida pelo grupo, apelava a um contexto real e, possivelmente, do conhecimento dos alunos, já que é muito habitual nos dias de hoje os alunos usarem pulseiras que fazem o registo da sua atividade física. Em particular, a representação gráfica que aparecia na tarefa dizia respeito às calorias gastas durante um dia por uma pessoa que usava uma pulseira dessas. Com o trabalho nessa tarefa, os alunos eram convidados a analisar a informação apresentada e a elaborar um pequeno texto com as principais conclusões, depois de terem identificado as variáveis em estudo e terem justificado se a situação exposta representava uma função. Para concluir o seu trabalho, os alunos faziam a representação gráfica da atividade de um dia seu.

O grupo começou por resolver a tarefa, analisando detalhadamente toda a informação apresentada. Com esse trabalho, o grupo conseguiu aperceber-se de eventuais dificuldades que os alunos podiam enfrentar na resolução da tarefa, já que deviam compreender que a representação gráfica apresentava quatro momentos distintos de um dia, com indicação das calorias gastas em cada parte do dia, consoante o tipo de atividade que se estava a realizar.

Após a exploração matemática da tarefa, o grupo discutiu a tarefa do ponto de vista didático: como a apresentar à turma. Ponderaram a eliminação da primeira questão e a apresentação da terceira questão em primeiro lugar. Contudo, após a intervenção do professor Afonso que alertou para a importância dos alunos conseguirem saber se estão perante uma função, a partir da sua representação gráfica, concordaram que a pergunta se devia manter. A ordem das perguntas também pareceu ser a mais favorável à evolução do trabalho dos alunos, depois de a professora Ana vincar ser fundamental os alunos conhecerem as variáveis que se estão a relacionar quando estão a estudar funções:

> **Professora Ana:** Não era mais giro fazerem a interpretação do gráfico? Mais valia passar esta aqui para baixo.
> **Professor Afonso:** Não. Sabes que às vezes dá-se a ideia quando aparece (impercetível) quando olham para o gráfico para eles perceberem, imagina que estava aqui uma coisa mesmo na vertical (impercetível). Eu até punha a terceira em primeiro.
> **Professora Ana:** Eles têm que saber o que está em jogo. Que é o tempo e as calorias.
> **Professor Afonso:** Pois é. Está bem, está bem. (...) Esta no fim. (3.ª SC_2 dez 2013).

A segunda tarefa explorada pelo grupo foi *O melhor alarme*. Esta tarefa, embora muito ligada ao quotidiano das pessoas, pode não ser tão familiar aos alunos, já que as questões de segurança de uma habitação são normalmente tratadas pelos adultos.

A tarefa convidada os alunos a elaborarem um slogan para uma campanha publicitária, depois de interpretarem a informação apresentada em linguagem natural. Depois de resolverem a tarefa, o grupo pensou sobre a exequibilidade dessa tarefa ser explorada em sala de aula com os alunos. Decidiram abandoná-la, por considerarem que a natureza da proposta não se aproximava do trabalho que os alunos estavam habituados a realizar, comprometendo assim a sua atividade:

> **Professora Ana:** Esta é engraçada mas depois perdemos aqui. (...) E os meninos não estão habituados a este tipo de resoluções. (impercetível)
> **Professor Jorge:** Mas estamos a pensar trabalhar isto em quê? Em funções? Há uma relação entre duas variáveis. (impercetível) (...) Para mim é muito aberta. A atividade em si é muito aberta. Não sei se depois os conseguimos levar. Tenho algumas reservas. (3.ª SC_2 dez 2013).

A exploração dessa tarefa evidenciou a preferência dos professores por tarefas mais estruturadas, com uma sequência de raciocínios que permita aos alunos avançar no trabalho proposto.

O tempo restante não permitiu a análise da terceira tarefa, já que foi aproveitado para partilhar algumas ideias sobre a planificação do 8.º ano. Uma vez que se andava a abordar as Funções em sala de aula, o professor Jorge sugeriu a exploração de uma tarefa que costumava trabalhar com os alunos para estudar a função afim, com recurso à calculadora gráfica. Apresentou a tarefa de forma breve, referindo que surge numa situação de futebol, onde os alunos ao experimentarem vários remates na calculadora gráfica interpretam o significado do declive e da ordenada na origem. Frisou que a tarefa foi do agrado dos alunos, em anos anteriores. Assim, o grupo decidiu explorar essa tarefa em sala de aula, agendando a preparação dessa aula para a interrupção letiva (2/1/14).

Na quarta sessão conjunta, enquanto o grupo de formação se debruçou sobre as propostas para o tópico Funções, o grupo colaborativo iniciou a preparação de algumas tarefas para o tópico Equações para o 8.º ano, já que era o próximo conteúdo da planificação. O grupo colaborativo decidiu preparar dois problemas para explorar as equações do 1.º grau com denominadores. O primeiro resultava de algumas adaptações à tarefa *Eleição do delegado de turma*. O segundo problema, *Sacos e bolas*, foi proposto pelo professor Jorge, por apresentar um nível de desafio superior ao anterior e pela própria situação da tarefa: passagem de bolas de um saco para o outro. Esse tipo de situação favorece o trabalho dos alunos com ocasiões em que têm que retirar bolas de um saco e acrescentar ao outro, aspeto normalmente esquecido pelos alunos quando resolvem tarefas desse género.

O grupo decidiu adaptar a tarefa *Eleição do delegado de turma*, explorada na primeira sessão conjunta, para a apresentar aos alunos do 8.º ano, com o objetivo de trabalhar equações com denominadores. Nesse sentido, procedeu às respetivas alterações, considerando agora que o Lucas recebia metade dos votos da Sandra e a Sandra mais cinco votos do que a Francisca.

De seguida, passou à antecipação de possíveis estratégias a seguir pelos alunos, depois de decidir que a tarefa seria resolvida em grupos de 4 alunos:

> Os alunos podem recorrer à tentativa e erro, começando por experimentar valores arbitrários ou iniciando pelo número 10, correspondente à divisão equitativa dos votos. Esta estratégia de resolução pode ser organizada numa tabela. Podem, também, traduzir o problema por uma equação, considerando a incógnita o número de votos da Sandra, do Lucas ou da Francisca. No caso da incógnita designar o número de votos do Lucas, a equação que se obtém não tem denominadores. Este aspeto não parece problemático ao grupo. Pelo contrário, considera-se que enriquece a discussão.
> Face a estas possíveis respostas, o primeiro grupo a apresentar a sua resolução é o que recorre à estratégia por tentativa e erro, seguido dos grupos que traduzem por equação. Se surgir a resolução que contempla a equação sem denominadores é apresentada por último. (NC_9/1/14).

O grupo mencionou que a tarefa para além de favorecer a resolução de equações, permite aos alunos compreender que um mesmo problema pode ser traduzido por equações diferentes, cada uma com o seu conjunto solução. No entanto, a resposta ao problema é a mesma, independentemente da equação considerada.

O grupo preparou, de seguida, a tarefa *Sacos e bolas*. Depois de cada um resolver a tarefa partilharam-se ideias sobre as possíveis respostas dos alunos:

> Os alunos podem elaborar uma tabela para registar as diversas tentativas, considerando uma coluna para as bolas que ficam no saco A, outra para as bolas que ficam no saco B e outra para dar indicação da condição solicitada: $\frac{3}{2}A$ ou $1{,}5\times A$. Os alunos podem experimentar números arbitrários ou iniciar com números redondos como 5 e 10.
> Ainda numa situação de tentativa e erro, o grupo considera que os alunos podem ser desafiados a pensar nas condições dadas, já que se o número de bolas do saco B terá de ser $\frac{3}{2}$ do número de bolas que ficam no saco A, isto significa que o triplo do número de bolas que ficam no saco A representa um número par e, consequentemente, o número de bolas que ficam no saco A também tem que ser par. Assim, o número de bolas que sai do saco A tem que ser par, já que o saco tinha inicialmente 20 bolas. Este raciocínio leva os alunos a restringirem as tentativas a fazer.
> Contudo, em consequência do trabalho feito na tarefa *Eleição do delegado de turma*, o grupo atenta que é expectável que alunos traduzam o problema por uma equação, considerando que a incógnita representa o número de bolas que passam do saco A para o B. Nesse caso, podem ocorrer situações em que os alunos mais distraídos retirem as bolas do saco A e se esqueçam de acrescentar ao saco B. Mas se isso acontecer o professor pode alertar os alunos para isso levando-os a pensar para onde foram as bolas.
> Face a esta antecipação de estratégias, o grupo considera que a ordem de apresentação a seguir é a seguinte: primeiro a estratégia que recorre à tabela e depois o que traduz o problema por uma equação. (NC_9/1/14).

Antes de finalizar o trabalho desta sessão, o grupo discutiu o que se realizaria na seguinte. Depois de consultar as planificações, o grupo colaborativo decidiu que a próxima sessão de trabalho continuava a incidir na temática das equações para o 8.º ano, para explorar com os alunos o subtópico sistemas de equações. O grupo levou para análise em casa um conjunto de propostas (Anexo 9), distribuídas pela investigadora, combinando, também, que se poderiam trazer outras tarefas para o próximo encontro.

Na quinta sessão de trabalho colaborativo, o grupo partilhou as suas ideias sobre a análise das tarefas que fez em casa, onde mostrou interesse em explorar com os alunos a tarefa *O cavalo e a mula*, após uma outra tarefa com um nível de dificuldade inferior. Essa tarefa tem a particularidade de ser exigente na sua tradução de linguagem natural para linguagem matemática. Assim, para não comprometer o envolvimento dos alunos na sua resolução, o grupo considerou pertinente apresentar uma tarefa com um nível de desafio inferior antes dessa.

O professor Jorge partilhou com o grupo a tarefa *O retângulo num quadrado* (Anexo 10) que sugeriu para abordagem à temática em estudo. Depois de analisada a tarefa, o grupo colaborativo considerou que seria uma boa aposta e funcionaria bem antes da tarefa *O cavalo e a mula*. Assim, o grupo passou, de seguida, à resolução das tarefas. Antes de iniciar a partilha de ideias acerca das mesmas, decidiu-se que as tarefas seriam realizadas em grupos de 4 alunos, durante 20 minutos.

A tarefa *O retângulo num quadrado* é um problema que favorece a escrita de um sistema de equações e estabelece algumas conexões com a geometria, já que os alunos têm que fazer uso de alguns conceitos básico de geometria:

> Na resolução deste problema os alunos podem começar por organizar uma tabela com seis colunas, de forma a contemplarem todos os dados do problema: comprimento, largura, dobro do comprimento, triplo da largura, largura mais 3 e comprimento menos 3. De seguida, os alunos podem experimentar valores arbitrários até encontrarem a solução: terceira coluna igual à quarta e quinta igual à sexta. Contudo, uma leitura atenta dos dados do problema leva os alunos a concluírem que a medida da largura é representada por um número par, já que o dobro do comprimento tem que ser igual ao triplo da largura. A medida do comprimento também tem que ser representada por um número par, uma vez que se a "largura mais 3" tem que ser igual ao "comprimento menos 3" e a medida da largura é traduzida por um número par, então "largura mais 3" é representada por um número ímpar. Assim, a medida do comprimento é dada por um número par, já que ao se retirar 3 unidades representa um número ímpar. Da informação "Se o armazém tivesse mais 3 metros de largura e menos 3 de comprimento" os alunos concluem que a diferença entre o comprimento e a largura é igual a 6. Este raciocínio leva a que os alunos não estejam a experimentar todos os números mas se concentrem apenas em números pares com uma diferença de seis unidades.
> Os alunos também podem traduzir o problema por duas equações: uma dada pela primeira condição – "o dobro do comprimento é o triplo da largura" – e outra dada pela segunda – "Se o armazém tivesse mais 3 metros de largura e menos 3 de comprimento, seria um quadrado". Considerando c para representar a medida do comprimento e l a medida da largura, os alunos obtêm as equações: $2c = 3l$ e $c - 3 = l + 3$. Os alunos verificam que em cada uma das equações têm duas incógnitas, o que significa que ao resolveram a primeira equação em ordem a uma das incógnitas verificam que ela depende da outra, o que os conduz à substituição na segunda equação, de forma a eliminar uma das incógnitas. Os alunos encontram o valor de uma das incógnitas e, consequentemente, a partir da outra equação determinam o valor da restante, respondendo de seguida ao problema. O grupo considera, ainda, que os alunos também podem resolver as duas equações em ordem a uma das incógnitas, ficando com duas equações em

> ordem a essa incógnita. De seguida, pensando na metáfora da balança, igualam ambas as expressões e determinam o valor da outra incógnita. Os alunos podem, também, traduzir por um sistema de equações. Neste caso, escolhem uma das equações para começar e resolvem-na em ordem a uma das incógnitas. De seguida, substituem na outra.
> Relativamente ao momento da discussão coletiva, o primeiro grupo a partilhar a suas ideias é o que resolve por tentativa e erro, seguido do grupo que traduz o problema por um sistema de equações. (NC_23/1/14).

O grupo considerou que a tarefa permite evidenciar aos alunos que a solução de um sistema de equações não é um número como numa equação, mas um par ordenado. De seguida, passou-se à exploração da tarefa *O cavalo e a mula*. Depois de resolver a tarefa, o grupo colaborativo refletiu sobre a organização dos alunos para o trabalho autónomo, decidindo que a metodologia de trabalho seria a mesma da tarefa anterior. Antecipou, também, possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos:

> Os alunos podem recorrer à estratégia de tentativa e erro, organizando os valores numa tabela com seis colunas − carga inicial da mula, carga com que a mula fica recebendo um saco do cavalo, carga com que fica o cavalo, carga inicial do cavalo, carga com que fica a mula dando um saco ao cavalo e carga com que fica o cavalo recebendo um saco da mula – onde as duas últimas colunas têm que ser iguais. Contudo, o grupo alerta, novamente, para a pertinência da leitura cuidada da afirmação "se te dou um saco, a tua carga ficará igual à minha" que leva os alunos a concluir que a diferença entre a carga da mula e do cavalo é de duas unidades e a mula é o animal que leva mais carga. Por outro lado, a afirmação "Se eu te levasse um saco, a minha carga seria o dobro da tua" permite garantir que a carga inicial da mula é representada por um número ímpar, já que ao receber um saco terá de traduzir um número par. Desta forma, os alunos reduzem as hipóteses a testar. Em qualquer um dos raciocínios anteriores, a segunda afirmação deve levar os alunos a concluírem que os animais nunca podem ter carga igual.
> Em consequência do trabalho realizado na tarefa *O retângulo num quadrado*, é muito provável que os alunos comecem por traduzir o problema por um sistema de equações, apesar do seu nível de dificuldade superior. Os alunos podem esquecer-se, por exemplo, na primeira equação de retirar um saco ao cavalo quando o dão à mula, assim como colocar a carga com que fica o cavalo entre parêntesis, de modo a considerarem o seu dobro. Contudo, esses erros são facilmente ultrapassados com uma leitura mais atenta das afirmações.
> Face a estas possíveis resoluções, e de forma a explorar a tradução de problemas por sistemas de equações e praticar a sua resolução, o grupo considera que a segunda estratégia é partilhada a seguir à estratégia que recorre à estratégia de tentativa erro. (NC_23/1/14).

O grupo decide alterar o nome da tarefa para *O cavalo e o burro*, por sugestão do professor Afonso, de forma a incluir um diálogo apresentado no seu manual escolar.

Na sexta sessão conjunta, o grupo colaborativo dedicou-se à preparação de uma tarefa para explorar com os alunos do 7.º ano a função afim e a função linear. Dessa forma, decide recuperar a tarefa *Inscrição no ginásio* e fazer algumas alterações, de modo a aproximar ao tipo de trabalho que os alunos estão habituados: pedidos menos abertos e numa sequência crescente de nível de dificuldade.

Esta tarefa surge em contexto real e tem a vantagem de apresentar uma situação que pode ser familiar aos alunos, já que, atualmente, são cada vez mais as pessoas que frequentam ginásios.

A tarefa como apresentada inicialmente ao professores convidava, em primeiro lugar, os alunos a justificarem qual dos ginásios seria mais vantajoso, atendendo às condições oferecidas por cada um deles. De seguida, os alunos representavam a evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, em função do tempo de permanência. Apoiados nessa representação, os alunos explicavam em que medida essa estratégia os podia ajudar a decidir pelo melhor ginásio. A questão seguinte incitava os alunos a determinarem a imagem de um certo objeto, e vice-versa. Finalmente, os alunos traduziam por uma expressão analítica o preço a pagar em cada um dos ginásios, consoante o tempo de permanência.

O grupo colaborativo propôs algumas alterações à tarefa, mantendo as suas características e potencialidades, a partir de algumas discussões mantidas no grupo de formação na quarta sessão conjunta: apelar ao uso de diversos tipos de representação e favorecer a transição das sequências para as funções:

> Na primeira questão, apresenta-se uma tabela aos alunos, para preencherem, que relacione o tempo de permanência com o total gasto em cada um dos ginásios, de modo a que se familiarizem com a situação descrita e comecem a ter uma noção do comportamento dos dois ginásios.
> A segunda questão mantém-se, acrescentando a indicação que a representação da evolução do preço a pagar é apenas nos primeiros seis meses de permanência.
> No terceiro pedido, convidam-se os alunos a analisar durante quanto tempo é mais vantajosa a inscrição num determinado ginásio, justificando a sua resposta.
> A última questão também se mantém mas exclui-se a representação gráfica, uma vez que já foi solicitada aos alunos na segunda questão. (NC_27/3/14).

Após essas alterações, o grupo colaborativo passou à sua resolução com vista à partilha de possíveis raciocínios que os alunos podiam desenvolver. Ficou decidido que a tarefa seria resolvida em grupos de 4 alunos durante 50 minutos:

> Na primeira questão, os alunos vão adicionando sucessivamente o valor da mensalidade, mesmo não registando os meses em falta. Podem também usar um raciocínio que deixa antever uma relação entre as duas variáveis: multiplicar o número de meses pelo valor da mensalidade e adicionar o valor da inscrição, no caso do ginásio *100 Calorias*.
> No segundo pedido, os alunos representam a evolução do preço a pagar nos dois ginásios nos primeiros seis meses. Na elaboração do gráfico podem usar, por exemplo, uma escala de 45 em 45, ou de 50 em 50 para representar a evolução do preço a pagar.
> Na terceira pergunta, os alunos podem recorrer à tabela que preencheram na primeira questão para responderem ao solicitado.
> Na última questão, os alunos mobilizam os seus conhecimentos sobre sequências para escrever as expressões que relacionam o preço a pagar em cada um dos ginásios com o tempo de frequência: $p = 45 \times m$ e $p = 50 + 40 \times m$, onde m representa o número de meses e p o valor total pago. Os alunos podem usar diferentes letras para designar as variáveis em estudo. (NC_27/3/14).

Na sétima sessão, o grupo colaborativo preparou duas tarefas para o 7.º ano para trabalhar com os alunos as equações. Decidiu que as propostas a apresentar aos alunos seriam adaptações de duas tarefas que faziam parte da base de trabalho distribuída na sessão conjunta anterior para o tópico Equações: *Família Melo* e *A cantina da escola*.

Relativamente à primeira tarefa, que passou a designar-se *Família Rosa*, o grupo optou por apresentar condições que favorecessem a atribuição da incógnita a entes diferentes:

> É preferível atribuir nomes aos irmãos e definir outras condições que favoreçam a atribuição de mais que uma designação para a incógnita, já que a tarefa como está conduz os alunos a atribuírem a idade da Maria à incógnita. As condições passam a ser: A Maria tem 5 anos de diferença da irmã mais nova, a Sara. Um dos irmãos da Maria, o João, tem o triplo da sua idade e o outro, o Manuel, tem mais 10 anos do que a Maria.
> Consegue-se, ainda, com estas alterações fazer surgir equações com parêntesis, no caso de os alunos designarem a incógnita pela idade da Sara. (NC_27/3/14).

Após esse trabalho, o grupo iniciou a sua resolução e antecipação de possíveis estratégias a seguir pelos alunos. Antes da partilha, concordou-se que a tarefa seria resolvida em grupos de 4 alunos, durante cerca de 20 minutos:

> Os alunos podem começar por construir uma tabela com 5 colunas: idade da Maria, idade da Sara, idade do João, idade do Manuel e soma das idades. Os alunos podem experimentar valores arbitrários ou analisar com detalhe a informação dada para encontrar uma estratégia mais eficaz para as tentativas a fazer. Como a soma das idades dos quatro irmãos tem que ser representada por um número ímpar, então só pode acontecer ter três idades ímpares e uma par ou

a situação inversa: três pares e uma ímpar. Mas como o triplo de um número par é um número par, então só pode acontecer a situação: três idades pares e uma ímpar, sendo que a par terá que ser a da Sara, já que é cinco anos mais nova do que a Maria (diferença entre dois números ímpares é um número par). Desta forma, os alunos concluem que a idade da Maria só pode ser representada por um número ímpar e superior a 5, devido à diferença de idades entre as duas irmãs.
Os alunos podem, também, traduzir este problema por uma equação. Neste caso, o esperado é surgir duas designações para a incógnita: idade da Maria ou da Sara. Os alunos que representam a incógnita pela idade da Sara (S), obtêm para a idade da Maria a expressão $S + 5$, para a idade do João $3(S + 5)$ e para a idade do Manuel $(S + 5) + 10$. Os alunos que consideram a idade da Maria a incógnita (M), a idade da Sara é representada por $M - 5$, a idade do João por $3M$ e a idade do Manuel por $M + 10$.
No caso de surgirem estas estratégias de resolução, a estratégia por tentativa e erro é partilhada em primeiro lugar, seguido da estratégia por equação, com a incógnita a representar a idade da Maria e por último a outra. A partilha de ideias evidencia que o mesmo problema pode ser traduzido por diversas equações, consoante a designação da incógnita. No entanto, a resposta ao problema é a mesma, mesmo tendo as equações conjuntos solução distintos. (NC_27/3/14).

Quanto à tarefa *A cantina da escola*, o grupo colaborativo considerou que a tarefa ficava a ganhar se as condições fossem alteradas, de forma a envolver mais operações numéricas, o uso de parêntesis e denominadores. Neste caso, também favorecia a atribuição de diferentes designações à incógnita. A tarefa, como proposta inicialmente, tinha como objetivo fazer uma primeira abordagem às equações com denominadores e, portanto, todos os dias da semana eram definidos a partir de um deles.

Atendendo aos propósitos do grupo colaborativo, as informações dadas aos alunos foram alteradas para passarem a incluir diversas operações aritméticas e possibilitarem o uso de parêntesis e denominadores:

O enunciado da tarefa passa a incluir a seguinte informação: *i)* na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda; *ii)* na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça; *iii)* na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda; *iv)* na sexta serviu 156 almoços, e *v)* o total de almoços servidos é 666. (NC_27/3/14).

Definido o enunciado da tarefa, o grupo passou à sua resolução e previsão de possíveis raciocínios a seguir pelos alunos, depois de combinar que o modo de trabalho dos alunos seria o mesmo da outra tarefa e o tempo de trabalho autónomo seria de 25 minutos, já que a resolução da equação envolvia o uso de parêntesis e denominadores:

Os alunos podem resolver este problema por tentativa e erro, atribuindo um determinado número de almoços à segunda ou à terça e definindo o número de almoços dos outros dias à custa deste. Os alunos podem trabalhar com os cinco dias da semana e o total de almoços ou apenas com quatro dias da semana e com 510 almoços, já que o número de almoços servidos na sexta é conhecido.
Perante o trabalho já realizado na outra tarefa, os alunos podem também traduzir este problema por uma equação. Os alunos que consideram o número de almoços servidos na segunda a incógnita (x), obtêm para terça a expressão $x + 100$, para quarta $\frac{1}{2}(x + 100)$ e para quinta $2x$. Neste caso, pode ocorrer a situação de os alunos não colocarem parêntesis na informação de quarta. Face a este erro, o professor desafia os alunos a traduzirem por linguagem corrente o que têm representado e comparar com a informação dada.
Os alunos que atribuem a incógnita (x) ao número de almoços de terça-feira, obtêm para segunda a expressão $x - 100$, para quarta $\frac{1}{2}x$ e para quinta $2(x - 100)$. A situação referida anteriormente, relativamente ao uso de parêntesis, pode surgir também nesta equação para quinta-feira.
Para as duas ocorrências da incógnita, os alunos podem escrever uma equação com a informação de cinco dias da semana ou de quatro, alterando o total de almoços servidos. Caso não surja uma equação que considere a informação de quatro dias da semana, os alunos podem ser desafiados a pensar sobre isso. Mais uma vez, a discussão da tarefa evidencia a escrita de diferentes equações com diferentes conjuntos solução, mas a mesma resposta ao problema. A resolução da equação serve para recordar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e praticar a resolução de equações com denominadores.
O grupo considera que perante estas possíveis resoluções, a estratégia por tentativa e erro seria partilhada em primeiro lugar seguida da estratégia que usa uma equação. (NC_27/3/14).

O trabalho para além das sessões

O trabalho no grupo colaborativo estendeu-se para além das sessões conjuntas, principalmente, quando não era possível conciliar a preparação de materiais para as aulas com as tarefas que estavam a ser desenvolvidas nessas sessões.

No primeiro encontro, reuni com o professor Afonso para partilharmos ideias sobre a exploração das tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes*. Começámos por recordar o enunciado da primeira tarefa. De seguida, discutimos a organização da turma para trabalho nesta tarefa (grupos de 4 alunos) e o tempo a dar aos alunos para trabalho autónomo (25 minutos). Ultrapassadas estas questões, passámos à resolução da tarefa prevendo possíveis respostas que os alunos poderiam apresentar. Perante essas respostas pensámos numa ordem vantajosa para partilha de ideias.

Com a primeira questão, os alunos determinam termos de ordem variada de uma dada sequência:

Os alunos podem continuar a representar as figuras seguintes para responder ao solicitado, ou continuar apenas a sequência numérica subjacente à figura dada. Neste caso, os alunos podem organizar a informação numa tabela, onde registem o número da figura e o número de palitos de cada figura. Ainda nesta questão, pode surgir a escrita do termo geral e a determinação do número de palitos das figuras pedidas a partir do mesmo. Perante este cenário de respostas, o primeiro grupo a partilhar as suas ideias é o que recorre ao desenho e o segundo à tabela. Os grupos que recorrem à escrita do termo geral não são convidados a apresentar neste momento, já que se pretende explorar a questão 2 antes de se chegar à escrita do termo geral. (NC_25/11/13).

A segunda questão tem como objetivo determinar a ordem de um termo distante:

É esperado que os alunos recorram à continuação da sequência dada, da tabela que iniciaram na questão anterior ou às operações inversas ($76-1=75$, $75:3=25$). Neste caso, o convite para partilha de ideias é dirigido, inicialmente, ao grupo que continuou a tabela e, posteriormente, ao grupo que usou as operações inversas. (NC_25/11/13).

No terceiro pedido, os alunos são incentivados a escrever o termo geral da sequência dada e a explicar o raciocínio que seguiram para essa escrita:

Nesta questão, podem aparecer respostas com a escrita da: *i)* lei de formação; *ii)* expressão $3n+1$, já que os alunos veem que de figura para figura se acrescenta mais 3 palitos e confirmando com o primeiro termo sentem a necessidade de adicionar 1, *iii)* expressão $n+(n+1)+n$, quando identificam que o número de palitos do meio é mais 1 que o número da figura e as bases inferior e superior da construção têm tantos palitos como o número da figura; e *iv)* expressão $1+n+(n-1)+n+1$, para os alunos que identificam 1 palito em cada uma das pontas, no meio menos 1 palito que o número da figura e nas bases inferior e superior da construção tantos palitos como o número da figura. Segundo esta previsão, os grupos apresentam pela ordem sugerida na antecipação das respostas.
Ainda nesta questão, o professor Afonso considera pertinente acrescentar uma alínea adicional para os alunos determinarem, a partir do termo geral, o número de palitos da 100.ª figura. Este pedido tem como objetivo alertar os alunos para outras estratégias mais poderosas distintas do desenho. (NC_25/11/13).

Na quarta questão, os alunos são desafiados a interpretar uma expressão dada e a explicarem o raciocínio desenvolvido para a sua escrita:

A análise da figura e da expressão leva os alunos a concluírem que o $4n$ representa o total de palitos de uma figura com n quadrados separados e o $(n-1)$ o número de palitos que ficam sobrepostos aquando da junção dos quadrados. (NC_25/11/13).

Concluída a preparação desta tarefa, passámos para a tarefa *Cubos com autocolantes*. Concordámos que o modo de trabalho dos alunos seria o mesmo e o tempo para trabalho autónomo seria de 20 minutos.

Com a primeira questão os alunos determinam termos de ordem diversa:

> Enquanto para os 3.º, 4.º e 10.º termos os alunos podem recorrer ao desenho e à continuação da sequência subjacente à construção dada (podendo organizar numa tabela), para o termo de ordem 52 é esperado que os alunos desenvolvam outras estratégias mais eficientes. Uma análise cuidada da figura permite compreender que a construção número 52 possui 50 cubos com 4 autocolantes e dois cubos com 5 autocolantes. Os alunos não têm, ainda, necessidade de escrever o termo geral, admitindo-se, no entanto, essa possibilidade decorrente do trabalho realizado na tarefa *Palitos*. Face a esta antecipação, os grupos que recorrem ao desenho e à continuação da sequência apresentam as suas resoluções em primeiro lugar. As estratégias mais formais, que têm implícita ou explícita a escrita da expressão do termo geral, apresentam de seguida. (NC_25/11/14).

A questão seguinte convida à escrita e explicação do termo geral:

> Perante o trabalho desenvolvido na tarefa *Palitos* não se espera a apresentação da lei de formação. Os alunos que identificam o número de autocolantes que se acrescenta de figura para figura escrevem a expressão $4n + 2$, enquanto os alunos que procuram relacionar o número de cubos com o número de autocolantes escrevem a expressão $5 + 4(n - 2) + 5$, correspondendo o 5 ao número de autocolantes dos cubos dos extremos e $4(n - 2)$ o total de autocolantes relativos aos cubos que ficam no meio. Assim, os grupos que propõem estas resoluções apresentam as suas ideias por esta ordem. (NC_25/11/14).

A tarefa *Funções e futebol* foi proposta pelo professor Jorge para exploração em sala de aula, na terceira sessão conjunta. A opção por esta tarefa esteve relacionada com o conteúdo programático que andavam a dar, pelo contexto apelativo da tarefa e pelo recurso à calculadora gráfica: "A tarefa é muito interessante, porque os alunos exploram-na com a calculadora gráfica e ao fazerem remates à baliza estudam a função afim. Usei-a no ano passado e os alunos gostaram bastante e envolveram-se" (NC_2/12/13).

O grupo aceitou o desafio e nesse sentido combinou reunir para a preparar na primeira semana de janeiro, antes do início das atividades letivas, como já referido anteriormente. A professora Ana não esteve presente por motivos pessoais. Eu e o professor Afonso começámos por resolver a tarefa, já que não a conhecíamos. De seguida, o grupo passou à partilha de ideias relativas a cada um dos desafios a colocar aos alunos. Com o primeiro desafio, os alunos escrevem expressões para a função afim, a partir de uma expressão dada:

> Como o remate é feito no mesmo sítio os alunos devem perceber que a ordenada na origem deve ser a mesma, variando apenas o declive. O professor Afonso alerta para a importância de os alunos perceberem que a função constante $y = 5$ também responde ao problema. No caso de não surgir essa resposta, no momento da discussão os alunos são questionados a esse respeito. (NC_2/1/14).

O segundo desafio permite que os alunos continuem a escrever expressões da função afim, mas agora conjugando a informação do declive e da ordenada na origem, em função do local de remate:

> Os alunos experimentam algumas expressões na calculadora, contudo devem perceber que o valor da ordenada na origem corresponde à ordenada do ponto correspondente ao remate. Os alunos, através da experiência, também concluem que se o local do remate se encontra acima do poste superior da baliza o declive deve ser negativo e positivo se o local de remate se encontrar abaixo do poste inferior da baliza. O professor Jorge salienta que a discussão deste desafio deve evidenciar a relação entre a inclinação da reta e o declive. (NC_2/1/14).

Com o terceiro desafio, os alunos trabalham com o caso particular da função linear e exploram as condições que devem ser satisfeitas para que as retas sejam paralelas:

> Com algumas experiências na calculadora gráfica, os alunos verificam que quando o declive é o mesmo as trajetórias seguidas pela bola são paralelas. Para entrar na baliza, a ordenada na origem deve ser inferior à diferença entre as ordenadas dos pontos correspondentes aos postes, se for igual a bola bate no outro poste, já que a função linear dada passa pelo ponto representante do poste inferior.
> Com a discussão deste desafio, pretende-se que os alunos concluam que retas paralelas têm o mesmo declive. (NC_2/1/14).

O quarto desafio convida os alunos ao cálculo algébrico, já que alerta para a não utilização da calculadora. Os alunos são incentivados a verificarem se determinados pontos pertencem à equação de uma certa reta:

> O professor Jorge, pela sua experiência em anos anteriores, alerta que os alunos vão recorrer certamente à calculadora, mesmo sendo dito para não o fazerem. Nesse caso, os alunos serão incentivados também à resolução algébrica:

> substituir o x e o y pelas respetivas coordenadas dos pontos dados. É importante que os alunos não se esqueçam que o local de remate corresponde à ordenada na origem. Se os alunos tiverem dificuldade em concluir se um determinado ponto pertence ou não a uma reta, o professor apoia na interpretação do resultado obtido: proposições verdadeiras ou falsas. (NC_2/1/14).

Com recurso à calculadora gráfica, no quinto desafio os alunos escrevem expressões para a função afim, tendo em conta os dois remates que são feitos e de forma a que as retas se intersetem:

> Os alunos encontram, após algumas experiências na calculadora, as expressões para as funções representativas dos dois remates e de forma a que as trajetórias seguidas pelas bolas não se intersetem antes de entrarem na baliza. Atendendo aos locais de remate (ordenada na origem) e à posição da baliza, os alunos não experimentam valores completamente arbitrários para o declive de cada uma das retas mas declive positivo para a reta que representa a trajetória da bola rematada do ponto C e negativo no outro caso. Pelo trabalho já desenvolvido no quarto desafio, os alunos também podem resolver esta questão algebricamente. De facto, basta considerar dois pontos que verifiquem as condições solicitadas (antes e depois da baliza) e substituir na equação das retas. Os alunos compreendem, pelo trabalho já realizado nos dois primeiros desafios, que as equações das retas são do tipo $y = mx + 3$ e $y = mx + 8$. (NC_2/1/14).

No último desafio, os alunos são mais uma vez incentivados a não utilizarem a calculadora. Nesse momento, os alunos têm que determinar o ponto de interseção de duas retas, através da substituição das coordenadas dos pontos dados nas equações das retas apresentadas:

> O professor Jorge alerta para o facto de ser natural, quando os alunos substituem um ponto e ele não pertence a uma reta, já não substituírem na outra, assim como no caso de pertencer. Na última situação, os alunos devem ser alertados para a necessidade de substituírem na outra reta. Os alunos devem concluir que o ponto de interseção de duas retas tem que pertencer a ambas as retas. (NC_2/1/14).

Antes de dar por terminada a preparação da tarefa, o grupo decidiu que os alunos resolveriam a tarefa em grupos de 4 alunos, sendo disponibilizada uma calculadora gráfica a cada dois alunos. Refletindo sobre o momento de discussão coletiva, o grupo concluiu que seria preferível discutir os dois primeiros desafios antes de os alunos realizarem o terceiro. O próximo momento de partilha de ideias seria no final do terceiro desafio. No final do quarto desafio os alunos voltavam a discutir ideias, sendo o último momento de partilha após a conclusão dos desafios cinco e seis.

Contributos do grupo de formação para o grupo colaborativo

As diversas sessões de trabalho que ocorreram no grupo de formação contribuíram para a reflexão sobre diversas questões ligadas às práticas de sala de aula, nomeadamente, as dificuldades que os alunos enfrentam no trabalho com as sequências, as funções e as equações, a preparação da condução de uma discussão coletiva e identificação de possíveis resoluções a apresentar pelos alunos em consequência do trabalho realizado em torno de uma tarefa.

Os episódios escolhidos para mostrar as reflexões que ocorreram entre os diversos professores estão direta ou indiretamente relacionados com as práticas letivas dos professores caso deste estudo. Essa opção pretende evidenciar os possíveis contributos das variadas trocas de ideias que se geraram entre todos para o enriquecimento do conhecimento didático dos professores. Em especial, o envolvimento dos professores na resolução de tarefas matemáticas e consequente partilha com o grupo da sua estratégia de resolução ajuda no aprofundamento do conhecimento matemático. A identificação dos erros e dificuldades mais comuns no trabalho dos alunos com a Álgebra contribuiu para o enriquecimento da vertente do conhecimento dos alunos e da aprendizagem. A dimensão do conhecimento da prática letiva foi favorecida pela partilha de ideias sobre: *i)* as adaptações a fazer às tarefas; *ii)* o momento mais ajustado para apresentação da tarefa aos alunos; *iii)* a definição do modo de trabalho a propor aos alunos para a realização da tarefa; e *iv)* a preparação do momento de discussão, prevendo possíveis respostas e encadeamento das mesmas. Os contributos para o aprofundamento do conhecimento do currículo emergiram das discussões mantidas para cada tema matemático, onde se focou, em particular, a ordem de abordagem dos conteúdos mais favorável à aprendizagem dos alunos.

A discussão da exploração das tarefas conduziu à partilha de diferentes ideias com potencialidades para o enriquecimento do conhecimento matemático dos professores. Por exemplo, a discussão em torno da tarefa *Palitos* fez sobressair a possibilidade de escrita e explicação de diferentes expressões para o termo geral de uma dada sequência, relacionando com a figura presente na sequência:

Professor Leandro: Porque é assim, há aqui um esquema que é, somas sempre 3 em 3 e portanto aquilo tem de ser $3n$ mais qualquer coisa, ver o primeiro termo e tudo bem.
Professora Cristiana: Eles aqui veem que a parte de baixo é igual à de cima, em termos de palitos. (impercetível)
Professora Ana: Nós pensámos que temos sempre duas filinhas de fósforos. E as duas linhas horizontais têm sempre tantos fósforos como o número da figura, portanto duas vezes n, $2n$. Depois temos sempre 3 pauzinhos ao alto. Temos sempre mais 1 que o número da figura, mais $n + 1$. Foi assim que fizemos.
Investigadora: Podemos olhar para esta mesma ideia de outra forma. Podia pensar que os das pontas são sempre fixos, sempre mais 2 e só varia no meio.
Professor Jorge: E no meio é $n - 1$. (...)
Investigadora: E esta configuração? (C)
Professora Ana: Pronto, exato. Exato. Exatamente. E depois fechas. Sim senhora.
Investigadora: Sempre com o apoio visual, o que é que aqui nós identificamos como comum? (2.ª SC_24 out 2013).

Esta troca de ideias favorece um aprofundamento da exploração matemática que é possível fazer em torno da escrita e explicação de uma expressão para o termo geral de uma sequência e revela a sua estreita ligação à forma como cada um a analisa. Evidencia, também, numa questão desta natureza, a possibilidade de construção de um maior leque de raciocínios, distinto do simples procedimento rotineiro de identificar o padrão aditivo: “há aqui um esquema que é, somas sempre 3 em 3 e portanto aquilo tem de ser $3n$ mais qualquer coisa, ver o primeiro termo e tudo bem” (Professor Leandro). As estratégias apontadas para além desta têm a grande vantagem de não dificultarem o trabalho com sequências que não conduzem às progressões aritméticas.

A partilha de ideias que se proporciona em torno da resolução de uma tarefa matemática sublinha a diversidade de respostas que os alunos podem apresentar e que os professores precisam de saber analisar, de forma a promover a aprendizagem dos alunos. Quando essa troca não existe e não é feito um esforço por prever os vários raciocínios que os alunos podem desenvolver, a exploração de uma tarefa ou de uma ideia matemática pode não ser totalmente aproveitada em termos de aprendizagens matemáticas a proporcionar.

A diversidade de expressões que os alunos podem apresentar para o termo geral de uma sequência faz refletir os professores acerca das estratégias que podem seguir para verificar, perante cada expressão, se um determinado elemento é termo da sequência, como apresentado na descrição da segunda sessão. Os professores identificam o raciocínio envolvendo as operações inversas como o mais poderoso para verificarem se determinado elemento é termo de uma sequência, enquanto os alunos não possuem conhecimentos sobre equações. Refletem, ainda, sobre a importância da justificação da escrita da sua expressão para conseguir responder a essa pergunta, na medida em que os alunos que conseguem justificar como pensaram para escrever a expressão do termo geral de uma sequência mais facilmente verificam se determinado número é ou não termo dessa sequência, uma vez que o que está em causa é fazer um raciocínio inverso, sistematizado pela investigadora: "a forma como cada um viu a figura, escreveu a sua regra pode ajudar depois a desmontar esse problema, porque não é mais do que fazer o caminho inverso (2.ª SC_24 out 2013)". Esta discussão baseia-se em estratégias de resolução mais poderosas, já que os alunos também podem recorrer ao desenho ou à continuação da sequência numérica. A mobilização do conhecimento matemático de cada um, com contributos para o conhecimento dos alunos e da aprendizagem, está presente nesta reflexão, uma vez que se discutem possíveis raciocínios a desenvolver pelos alunos.

Ainda a respeito dos contributos para o enriquecimento do conhecimento dos alunos e da aprendizagem, as discussões que se proporcionaram na segunda sessão conjunta favoreceram a identificação de erros que os alunos costumam cometer no trabalho com as sequências e respetivas causas. Os professores refletem sobre a desvantagem de os alunos se focarem na identificação do padrão aditivo quando analisam uma sequência que traduz uma progressão aritmética. De facto, os alunos que pensam apenas no número que se adiciona para se passar de uns termos para os outros numa dada sequência, normalmente, escrevem a expressão do termo geral de uma forma errada: $n + padrão\ aditivo$ em vez de $n \times padrão\ aditivo$. Esse raciocínio mostra a importância de os alunos relacionarem o número da figura com a escrita da expressão do termo geral.

Estas discussões contribuem, também, para o enriquecimento do conhecimento dos professores na vertente do conhecimento dos alunos e da aprendizagem, uma vez que refletem sobre os erros que os alunos cometem e as razões para isso acontecer. A consciência da existência deste erro e respetiva causa pode levar a uma abordagem diferente em sala de aula, traduzindo-se em aprendizagens mais significativas para os alunos.

Ainda nesta linha, o trabalho realizado nas sessões proporcionou, também, a reflexão sobre as dificuldades mais comuns dos alunos no estudo das funções. Os professores destacaram, essencialmente, a noção de variável, a terminologia e a simbologia, na terceira sessão conjunta. A terminologia associada a este tópico matemático é uma das grande dificuldades que os professores identificam no trabalho dos seus alunos, aliada à simbologia característica deste assunto. A grande abstração subjacente ao estudo das funções traduz-se em graves entraves ao desenvolvimento da compreensão matemática dos alunos. Em consequência, os alunos continuam a evidenciar em anos seguintes dificuldades em lidar com as funções, principalmente, quando têm que determinar o objeto que corresponde a uma certa imagem, e vice-versa: "E mesmo passados 3 anos de escolaridade, eles chegam ao 10.º ano e tens f de x e tens y eles continuam a não perceber. Ó professora é para substituir x ou y?" (Professora Sara). Ainda na simbologia, os alunos lidam com expressões que possuem diversas letras com significados distintos. Por exemplo, no caso particular da expressão da função afim, os alunos contactam com quatro letras diferentes que precisam saber interpretar:

> **Professor Jorge:** Eu acho que as coisas complicam-se um bocado mais quando têm 4 letras em causa.
> **Professor José:** Ainda por cima $y = mx + b$.
> **Professor Jorge:** Aquilo para eles, aquilo é uma coisa. Nós vamos entrar nisso. Eu já dei mais ou menos a linear.
> **Professor José:** E agora espeta-lhes mais o b. (3.ª SC_2 dez 2013).

Os professores destacam, ainda, na sua discussão na terceira sessão, o contexto real como o contexto mais favorável ao trabalho com as funções, em particular para atribuir significado ao cálculo de imagens conhecidos os objetos e a situação inversa.

Ainda nessa sessão, os professores identificam as representações gráfica e tabular como formas privilegiadas de expressar relações entre variáveis, destacando a tabular como a preferida dos alunos. Quanto à representação gráfica, salientam a pertinência de interpretar informação apresentada por essa via. O conhecimento matemático que os professores possuem é mobilizado na sua prática letiva, fundamentalmente, no que se refere à aprendizagem dos alunos.

Continuando na linha de reflexão que favoreceu a troca de ideias acerca das principais dificuldades dos alunos no trabalho com a Álgebra, em relação ao tópico Equações, os professores realçaram, na quinta sessão, dificuldades relacionadas com a resolução de equações, nomeadamente, com a aplicação de algumas regras algébricas básicas. Os professores refletiram, também, sobre algumas estratégias que podem ser usadas para ajudar os alunos a superar esses obstáculos. Esses contributos podem ser mobilizados nas práticas de sala de aula.

> **Professora Isaura:** [Referindo-se ao menos atrás da fração] Sabes o que eu lhes digo, tirem os denominadores, quando tirarem os denominadores introduzem os parêntesis. (impercetível) (...)
> **Professor José:** Às vezes têm um número inteiro a multiplicar por uma fração, multiplicam pelo numerador e pelo denominador. (...)
> **Professora Ana:** O problema é quando continuam assim e não melhoram. Deixem me só partilhar uma coisa. (vai ao quadro e escreve um erro dos seus alunos).
> **Professor José:** x mais 1 sobre x mais 2. Corta o x com o x. (impercetível) (5.ª SC_ 23 jan 2014).

Algumas das dificuldades dos alunos neste assunto programático são consequência de ideias não assimiladas sobre números e operações, em particular das operações com números racionais. Também no tópico Equações, os professores revelam a sua preocupação relativamente à persistência destes erros em anos subsequentes.

No caso do trabalho com sistemas de equações, os erros identificados pelos professores no trabalho dos alunos situam-se na aplicação de procedimentos, resultado de uma fraca compreensão sobre os princípios básicos subjacentes à resolução de uma equação, como destaca a professora Cristiana:

> Ainda mais me chateia é quando eles estão a resolver um sistema, por exemplo, e depois aparece quando eles já estão a descobrir a segunda incógnita, em que um deles é fracionário e eles reduzem outra vez ao denominador e tumba, saca denominadores. Isso fazem eles. Isso para mim, acho que ainda é pior, porque eles não têm noção do que estão a fazer e estão a trabalhar com 2 números fracionários. Esse erro para mim ainda é mais grave. (5.ª SC_23 jan 2014).

A fraca compreensão do conceito de equação traduz-se na ocorrência de alguns erros que se revelam na conclusão incorreta da resolução de uma equação, como salientado pelos professores na quinta sessão conjunta. O professor José acrescenta, ainda, que é frequente os alunos assumirem que o x representa sempre um número positivo: "Menos x é sempre um número negativo" (5.ª SC_23 jan 2014).

A identificação pelos professores do erro "$3x - 3x$ dá x" (5.ª SC_23 jan 2014) associada à ideia que numa equação "Tem que dar sempre x igual a" (5.ª SC_23 jan 2014) mostra que os alunos consideram que todas as equações têm que ter solução, revelando falta de compreensão nas situações que envolvem equações impossíveis ou possíveis indeterminadas.

Outra das dificuldades apontada pelos professores, no trabalho dos alunos com as equações, diz respeito à tradução de linguagem natural para linguagem matemática, daí a importância de se explorarem problemas que envolvam equações. A situação contrária não é, na opinião dos professores, tão grave, já que os alunos, segundo o professor Afonso, usam muito a estratégia de inventarem uma história em torno de um número: "Eles aí conseguem arranjar sempre aquela história de um número e tal, adiciona-se um número, por aí" (5.ª SC_23 jan 2014).

Os professores destacam, ainda, as situações envolvendo idades como uma dificuldade acrescida na resolução de problemas com equações. Nas práticas de sala de aula dos professores que constituem os casos deste estudo, exploraram-se diversos problemas que envolviam este tipo de situação (acrescentar um certo número a uma dos dados e retirar ao outro).

A discussão que se gerou em torno da tarefa *Cruzes às estrelas* fez refletir sobre uma possível abordagem às sequências, em particular qual a melhor trajetória para levar os alunos a escreverem, com compreensão, o termo geral de uma sequência. O segmento seguinte evidencia a perspetiva da professora Ana:

> Acho que isto não é mesmo a maneira mais agradável de os miúdos começarem. É sempre deste género, que eles consigam associar o número da figura à figura que está em cima, porque se não, eu acho que aqui eles têm muita dificuldade em perceber a ordem, o que é a ordem, o que é o termo. (...) Esta eu nunca a escolheria para começar de fazer a tentativa de chegar ao termo geral. Porque eu acho que não é mesmo por aqui, tem que ser qualquer coisa em que eles consigam estar a ver uma figura, olha esta está em primeiro lugar. (2.ª SC_24 out 2013).

Esta partilha de ideias realça a visão dos professores relativamente ao processo de aprendizagem dos alunos, mobilizando conhecimentos do currículo. Fica evidente nesses contributos a importância da relação entre o número da figura e a respetiva construção para o desenvolvimento da estratégia da decomposição de termos.

Em relação aos contributos das reflexões mantidas no grupo de professores para o desenvolvimento do conhecimento da prática letiva essas refletem-se em diversos aspetos, nomeadamente, na seleção de tarefas a apresentar aos alunos e na organização de uma discussão coletiva.

Os professores quando preparam as aulas pensam nas tarefas que vão propor aos seus alunos, tendo em conta as aprendizagens que elas podem proporcionar. A discussão em torno da tarefa *Cubos com autocolantes* evidencia a potencialidade de ampliar as ideias dos alunos no trabalho com as sequências ao sugerir uma construção que usa figuras tridimensionais. Os alunos têm de recorrer à sua capacidade de visualização para conseguirem analisar a sequência dada e escrever expressões para o termo geral. A justificação para a escrita dessa expressão também é fundamental, ao realçar a forma como cada um visualizou a sequência dada e ao mostrar que a mesma sequência pode ser traduzida por diversas expressões:

> **Professora Alice:** A tarefa dos autocolantes adaptada como esta ainda é mais interessante, porque enquanto eles aqui tiram só 1, eles têm de tirar dois, porque é uma face. (...) Conseguimos chegar a duas expressões. (...) $4n + 2$.
> **Investigadora:** Como pensaram para escrever essa?
> **Professora Alice:** Os 2 das pontas mais os 4 das faces.
> **Professor José:** Se calhar foram mais 6, 10, etc que era de 4 em 4, $4n$ mais. (impercetível)
> **Professora Telma:** $6n - 2(n - 1)$. (impercetível)
> **Professor Leandro:** Numa situação como esta era a dos palitos primeiro. (...) Depois fazes a generalização para o espaço. Fazes o jogo de passar do plano para o espaço.
> **Investigadora:** Aqui também podiam pensar assim, sendo esta construção fixa todos os outros que se fossem acrescentando iam-se acrescentando no meio destes cubinhos. Portanto aqueles 10 das pontas eram fixos e depois iam-se acrescentando os do meio que são $n - 2$, por causa dos 2 das pontas, logo $4(n - 2)$. (2.ª SC_24 out 2013).

A partilha de ideias entre os professores evidencia, também, em que momento da planificação a introdução da tarefa é mais produtiva para a aprendizagem dos alunos. Os contributos desta discussão convergem para o enriquecimento do conhecimento do professor na dimensão da prática letiva, a partir da mobilização do seu conhecimento matemático. Mais uma vez, os professores partilham diversas formas de escrever o termo geral de uma dada sequência, justificando o seu raciocínio.

A escolha do momento para apresentar a tarefa aos alunos tem implicações na diversidade de estratégias que eles podem apresentar. Na sexta sessão, os professores discutiram em que momento da sua planificação deviam introduzir a tarefa *O cavalo e a mula*, já que, na sua opinião, a introdução antes do estudo dos sistemas de equações conduzia, possivelmente, os alunos à sua resolução através de estratégias menos formais, por tentativa e erro ou por tabela, ou à mobilização dos seus conhecimentos relativos às equações. Contudo, esta provável abordagem pode fazer surgir uma maior variedade de estratégias que após a lecionação do conteúdo dos sistemas de equações.

Algumas das ideias partilhadas em torno da tarefa *Inscrição no ginásio*, durante a quarta sessão, realçam a necessidade de se fazerem adaptações às tarefas como apresentadas nos documentos curriculares, de forma a torná-las mais próximas do trabalho que os alunos estão habituados a fazer e de forma a promover a sua aprendizagem. As adaptações sugeridas mostram a opção dos professores por tarefas mais estruturadas em termos de sequências de raciocínios que os alunos podem desenvolver.

Este grupo de professores considera que as questões muito abertas não funcionam muito bem com o seu grupo de alunos. Contudo, nem sempre a opção por clarificar o objetivo da tarefa é uma escolha de todos, como também foi discutido na quarta sessão.

É evidente que a natureza das propostas que se apresentam aos alunos depende das características da turma e do trabalho que os professores fazem habitualmente com os seus alunos. Uma tarefa que se afaste muito do tipo de trabalho que costumam realizar pode comprometer o envolvimento dos alunos na tarefa e traduzir-se em pouca ou nenhuma atividade. Fica assim evidente que as opções dos professores têm em conta o conhecimento que possuem dos seus alunos e as suas crenças relativamente ao processo de aprendizagem. Esta vertente do conhecimento é assim mobilizado na escolha e preparação das tarefas a apresentar numa aula.

A tarefa *O cavalo e a mula* também foi muito discutida pelo grupo de professores na sexta sessão, onde ponderaram fazer algumas adaptações, de forma a baixar o nível de dificuldade da tarefa, fundamentalmente, da tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática.

A planificação de uma aula contempla, também, a definição do modo de trabalho dos alunos mais adequado à tarefa que lhes vai ser proposta. Pretende-se, com isso, garantir o seu envolvimento na resolução da tarefa, de forma a estabelecerem-se ideias matemáticas válidas, como salienta o professor José:

> A pares eles acabam por ter que estar mais envolvidos todos. Quer dizer, quando os grupos são maiores acabam por um ou outro balda-se. Mas por outro lado, também é capaz de serem mais cabeças a pensar, podem chegar um bocadinho mais longe. (1.ª SC_1 out 2013).

As reflexões que se proporcionaram nas várias sessões conjuntas, em particular na segunda, sublinharam a importância da preparação antecipada do momento da discussão a promover em sala de aula, já que habilita os professores para lidarem melhor com situações de imprevisto, clarificarem o objetivo da discussão e anteciparem diversas estratégias de resolução. Contudo, os professores também reconheceram, durante essa reflexão, que mesmo fazendo uma boa antecipação de raciocínios a desenvolver pelos alunos, podem aparecer alguns que não foram previamente pensados. Como forma de minimizar essas ocorrências, destacam a vantagem da preparação desse momento ser feito em conjunto com outros colegas, já que há uma maior troca de ideias. O trabalho proposto nas diversas sessões evolui nesse sentido. Os professores envolveram-se na resolução de diversas tarefas matemáticas com o objetivo de pensarem em possíveis estratégias que os alunos podiam seguir, como são sistematizadas pela professora Cristiana:

> Quanto a estratégias de resolução, na primeira questão nós consideramos ao fim de 3 meses, achamos que por contagem facilmente eles chegam ao resultado, visto que também ainda não têm o gráfico, só é pedido na questão seguinte. (...) Na segunda questão que é para escolher qual o ginásio também poderá ser por contagem ou até por um tabela, recurso a uma tabela para verem a evolução. Por exemplo, se for só uma questão de 3, 4 meses qual é que compensa escolher? Se for mais a longo prazo, se fizessem uma tabela, nós estivemos a fazê-la e vimos que a partir do 10.º mês já não compensava, compensava mais o outro ginásio. (...) Dos 40. (...) Apesar de ter a inscrição compensava mais esse, fizemos através de uma tabela. Ou podia ser também através do termo geral. (...) Depois na última seria mesmo o traçar o gráfico, interpretar o gráfico, compará-los, ver que realmente elas, as retas se intersetavam a partir do 10. (4.ª SC_9 jan 2014).

Nesta tarefa, os professores antecipam como estratégias possíveis a usar pelos alunos as que recorrem à contagem, à elaboração de uma tabela, à construção de um gráfico e à escrita de uma expressão algébrica. As estratégias apontadas são de natureza diversificada, algumas recorrem a procedimentos menos formais como a contagem e a tabela e outras a procedimentos algébricos, como a representação gráfica e a algébrica. Em sala de aula podem surgir estes raciocínios ou outros. Contudo, o professor seleciona as ideias a levar ao coletivo tendo em conta o objetivo que definiu para aquela aula. A ordem que estipula para a apresentação dos diversos raciocínios tem em conta a forma como considera ser a mais adequada para promover a aprendizagem dos alunos. Para o grupo de professores, a sequenciação das intervenções dos alunos segue o critério de formalização, das menos poderosas para as mais poderosas, como discutido na quarta sessão. No entanto, o professor José destaca a dificuldade da seleção e sequenciação das intervenções dos alunos:

> Muitas vezes, quando estamos nas aulas, e eu tenho essa dificuldade: conseguir perceber (...) muito bem o que eles têm andado a fazer para agora dizer vai tu, vai tu, vai tu. Ter esse poder de fazer isso, não é? Quer dizer, mesmo que eles se ofereçam, uma pessoa tem que dizer, já falam, mas agora quem fala é aquele e conseguir perceber enquanto eles estão a trabalhar quem não está a perceber nada daquilo, se calhar são esses que devem apresentar primeiro. Estás a perceber? Porque isso torna a discussão muito mais engraçada e muito mais rica, porque depois há um que comenta, não sei quê. Se um diz logo tudo que há para dizer, acabou e mudamos para outro sítio. (...) E a riqueza da discussão, corrigir o que está mal e não sei quê, tudo isso. (...) Tem um objetivo muito claro, que é: é realmente aproveitar esta tarefa que se leva para tentar que eles aprendam o mais possível. Claro que se demora. (4.ª SC_9 jan 2014).

Os professores reconhecem que a tarefa de selecionar as ideias com potencial para serem partilhadas não é fácil. Sendo, no entanto, claro para eles que o momento em que os alunos estão a discutir um conjunto de ideias matemáticas é fundamental para a sua aprendizagem. Nesse sentido, consideram ser importante que o professor vá questionando os alunos, de forma a ajudá-los a evoluir nas suas ideias: "Explica lá., Por que estás a dizer isso?" (Professor José, 1.ª SC_1 out 2013).

Quando ocorre um discussão em sala de aula, é normal que os alunos queiram partilhar muitas ideias, mas, no entanto, cabe ao professor a difícil tarefa de introduzir na discussão aquelas que considera com potencial para os ajudar a evoluir nas suas ideias iniciais e atingir o objetivo matemático que definiu para aquela aula: "Nós às vezes quando estão 3 ou 4 a falar nós fazemo-nos de surdos e apanhamos o que queremos" (Professor José, 1.ª SC_1 out 2013).

Estes episódios de reflexão evidenciam os contributos que podem ser dados à prática letiva dos professores, em particular aos professores caso deste estudo. Na verdade, as discussões que se promoveram em volta da resolução das tarefas matemáticas mostrou outras estratégias de resolução distintas das suas. Estas ideias contribuem também para aumentar o leque de possíveis raciocínios a apresentar pelos alunos, melhorando a qualidade da exploração matemática que se pode fazer à volta de uma tarefa.

Os professores caso trabalharam com os seus alunos diversos problemas envolvendo equações ou sistemas de equações com situações envolvendo idades ou semelhantes, após a discussão no grupo das principais dificuldades dos alunos no trabalho com as equações.

No 7.º ano de escolaridade, os professores exploraram uma tarefa que apelava ao uso de diferentes tipos de representação (algébrica, gráfica e tabular), depois de feitas algumas adaptações à tarefa inicial. Essa tarefa foi muito discutida entre os professores, nomeadamente na forma como a apresentar aos alunos e sequência de pedidos a fazer.

No âmbito das sequências, as tarefas exploradas com os alunos apresentaram sequências pictóricas com figuras bi e tridimensionais. Esta implementação ocorre posteriormente à reflexão da pertinência do trabalho dos alunos com esse tipo de sequências, fundamentalmente, para o seu envolvimento na escrita do termo geral. A partilha de ideias no grupo também evidenciou a vantagem de se trabalhar essas duas tarefas assim como a ordem mais adequada para a apresentar aos alunos.

As aulas

Os professores deste estudo desenvolverem algumas aulas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades, Funções e Equações.

O tópico Sequências e regularidades foi abordado somente no 7.º ano de escolaridade. Os professores Afonso e Ana exploraram com os seus alunos as tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes*, cada uma num bloco de 45 minutos.

Para o tópico Funções foram desenvolvidas com os alunos do 8.º ano a tarefa *Funções e Futebol*, pelos professores Afonso e Jorge. No 7.º ano, os professores Ana e Afonso trabalharam com os alunos a tarefa *Inscrição no ginásio*. As duas tarefas foram exploradas num bloco de 90 minutos.

O tema das Equações foi tratado no 7.º ano, pelos professores Afonso e Ana, através das tarefas *A cantina da escola* e *Família Rosa*, cada uma num bloco de 45 minutos. No 8.º ano, foram trabalhadas as tarefas *Eleição do delegado de turma* e *Sacos e bolas*, cada uma também em 45 minutos. As tarefas *O retângulo num quadrado* e *O cavalo e a mula* também foram desenvolvidas cada uma num bloco de 45 minutos, para abordar os sistemas de equações com os alunos do 8.º ano.

Saliento, em todas as aulas, o empenho dos alunos na realização das tarefas propostas.

As tarefas

Caracterizo, de seguida, as tarefas realizadas pelos professores que constituem os casos deste estudo (em Anexo 10).

Tarefa *Palitos*: Esta tarefa, organizada em quatro questões, apresenta uma sequência pictórica de vários retângulos construídos com palitos, a partir da junção 1, 2, 3, ... quadrados de palitos. No primeiro pedido, os alunos são convidados a determinarem termos próximos da sequência de figuras apresentada. Com a segunda questão, têm de verificar se um determinado elemento é ou não termo da sequência dada, justificando o raciocínio desenvolvido. Na pergunta seguinte, os alunos são desafiados a escreverem uma expressão para o termo geral da sequência dada, explicando o raciocínio seguido. No último pedido, os alunos analisam uma expressão oferecida para o termo geral da sequência exposta no enunciado e explicam um possível raciocínio desenvolvido para a escrita dessa expressão. Para concluir o trabalho nesta questão, os alunos são desafiados a relacionarem a expressão que escreveram com a apresentada nesta pergunta.

Tarefa *Cubos com autocolantes*: Esta tarefa surge num contexto de um jogo com cubos e autocolantes. Os autocolantes são colados nas faces dos cubos, depois de estes estarem unidos. Os alunos analisam a sequência de cubos dada para responderem a duas questões. Na primeira, os alunos são chamados a determinarem termos próximos e distantes da sequência dada. Na segunda, escrevem e explicam uma expressão para o termo geral da sequência de figuras apresentada.

Tarefa *Inscrição no ginásio*: A tarefa surge num contexto próximo dos alunos: inscrição e ida a ginásios. A informação da tarefa é apresentada em linguagem natural. Os alunos têm que interpretar a informação apresentada para responder a quatro questões que apelam ao uso de representações diversificadas. Na primeira questão, os alunos têm que preencher uma tabela que relaciona o número de meses de frequência de dois ginásios com o valor total gasto. Os alunos mobilizam a informação apresentada no enunciado da tarefa para o preenchimento da tabela, começando a prever o tipo de comportamento de cada um dos ginásios em relação às variáveis em estudo. Essa informação é transferida para a elaboração de um gráfico, na segunda questão, que relaciona o valor total gasto em cada um dos ginásios durante os primeiros seis meses de frequência. No terceiro pedido, os alunos concluem sobre as condições oferecidas em cada um dos ginásios, pronunciando-se sobre o tempo de frequência necessário num dos ginásios para se tornar mais vantajoso relativamente ao outro. Na última questão, os alunos são convidados a traduzir por uma expressão a relação entre as duas variáveis.

Tarefa *Funções e futebol*: Esta tarefa surge num contexto de futebol, onde os alunos têm que fazer diversos remates à baliza, com a ajuda da calculadora gráfica. Atendendo à situação apelativa da tarefa, encontra-se organizada em seis desafios, com o objetivo de os alunos estudarem a função afim, em particular algumas das características do declive e da ordenada na origem. No primeiro, os alunos são convidados a rematar à baliza, a partir de um local definido para o remate, e a escrever a expressão da função que define a trajetória do remate. É esperado que os alunos relacionem o local do remate com a ordenada na origem da expressão da função afim. No segundo desafio, os alunos aprofundam essa conclusão fazendo remates a partir de locais distintos. No desafio seguinte, os alunos trabalham com o caso particular da função linear e indicam possíveis locais para o remate, de forma a que as trajetórias seguidas pela bola sejam paralelas. No quarto desafio, é apresentada uma expressão de uma trajetória da bola, onde é desconhecido o local do remate. Os alunos são convidados a determinarem esse local, sem recurso à calculadora gráfica. Ainda no mesmo desafio, são dadas duas expressões de trajetórias seguidas pela bola para os alunos verificarem se acerta nos postes. No quinto desafio, os alunos, através de experiências na calculadora gráfica, escrevem expressões para duas trajetórias a seguir pela bola rematada de dois locais distintos, de forma a que as trajetórias se cruzem antes e depois de a bola entrar na baliza. No último desafio, são dadas as expressões de duas trajetórias seguidas pelas bolas. Os alunos têm que determinar o local onde as bolas chocam.

Tarefa *A cantina da escola*: Esta tarefa apresenta um conjunto de informação em linguagem natural relacionada com o número de almoços servidos pela cantina de uma escola. Depois de interpretarem a informação apresentada, os alunos têm que desenvolver uma estratégia que lhes permita determinar o número de almoços servidos em cada um dos dias da semana. Pretende-se com esta tarefa que os alunos resolvam problemas envolvendo equações.

Tarefa *A Família Rosa*: Com esta tarefa os alunos continuem a resolver problemas com equações. Esta tarefa surge num contexto de um desafio, a partir do qual os alunos conseguem determinar a idade de cada um dos filhos de uma senhora conhecendo pequenas pistas, como a soma das idades dos quatro filhos e algumas relações entre as suas idades.

Tarefa *Eleição do delegado de turma*: Com o trabalho nesta tarefa, os alunos resolvem problemas envolvendo equações com denominadores. A tarefa aparece numa situação de eleição do delegado de turma, onde se conhecem informações relativas ao número de votos de três candidatos. O desenvolvimento de uma estratégia eficaz permite aos alunos apurar o candidato que foi eleito para delegado de turma e com que número de votos.

Tarefa *Sacos e bolas*: Esta tarefa surge numa situação em que os alunos têm que passar bolas de um saco para o outro, de forma a verificarem as condições estabelecidas. Isto é, é apresentado um saco com 20 bolas e outro com 15 bolas. Pretende-se determinar o número de bolas que devem passar do primeiro saco para o segundo, de modo a que este fique com $\frac{3}{2}$ do número de bolas que ficam no saco A. Esta tarefa envolve os alunos, mais uma vez, na resolução de problemas com equações com denominadores. Contudo, esta situação tem a particularidade de exigir a subtração de um determinado número a uma das condições e a adição do respetivo número à outra condição.

Tarefa *O retângulo num quadrado*: Esta tarefa favorece o trabalho dos alunos com sistemas de equações e estabelece conexões com a Geometria. A partir do conhecimento das propriedades básicas do quadrado e do retângulo, os alunos relacionam as informações relativas às medidas do comprimento e da largura de um retângulo de forma a transformá-lo num quadrado (indicando a medida do seu lado).

Tarefa *O cavalo e o burro*: Esta tarefa cumpre o mesmo objetivo da tarefa anterior. Com o trabalho nesta tarefa, os alunos são convidados a interpretar um conjunto de informação dada em linguagem natural, através de um diálogo entre um cavalo e um burro, para determinarem a carga de cada um dos animais. Nesta tarefa, os alunos exploram, novamente, a situação de subtração de um certo número a uma das condições para a adicionarem à outra.

CAPÍTULO VII

A professora Ana

O caso da professora Ana encontra-se organizado em três secções, seguidas de uma síntese final. Na primeira secção, descrevo o percurso profissional da professora, salientando as principais características desse trajeto. Na segunda secção, apresento os aspetos fundamentais que orientam a preparação da condução da discussão coletiva, de forma a promover a aprendizagem dos alunos. Na secção seguinte, evidencio a forma como a professora promove a discussão coletiva em torno de tarefas relacionadas com ideias algébricas, a partir da preparação feita anteriormente. As práticas de discussão de Ana são analisadas de forma integrada com o seu conhecimento didático, dada a inter-relação entre ambos. Analiso como mobiliza este seu conhecimento didático, nomeadamente, o da Matemática, o do currículo, o da aprendizagem e dos alunos e o da prática letiva na preparação e condução da discussão coletiva, com vista ao desenvolvimento do conhecimento algébrico dos seus alunos, através das tarefas que seleciona, da forma como as prepara e explora em sala de aula.

O percurso profissional

Ana é uma professora que conta com uma vasta experiência de ensino. Dos seus vinte e dois anos de serviço docente (no momento da sua participação no grupo colaborativo), apenas um foi cumprido numa escola diferente da atual. Contudo, dada a proximidade das escolas, presentemente fazem parte do mesmo Agrupamento. Apesar de gostar bastante da escola onde trabalha, Ana mostra algum desejo de desempenhar as suas funções numa outra escola. Sente a necessidade de enfrentar novos desafios, fundamentalmente, conhecer outras formas de trabalhar e partilhar outras experiências, o que também pode ser conseguido com a entrada de novos colegas para a escola, já que o corpo docente é muito estável:

> Eu ultimamente acho que gostava de sair daqui até para sentir mais algum desafio, ou para depois ter vontade de voltar, porque uma pessoa estando muitos anos no mesmo sítio tem esse problema: que a dada altura é um *ram-ram*, é achar que estamos a fazer bem e se calhar não nos preocupamos se podia ser de outra maneira (...) começo a sentir essa falta de, será que é assim nos outros sítios? (...) Eu acho que falta (...) uma lufada e que não tem havido, porque não entra já quase ninguém. (EI_set 2013).

O discurso de Ana revela a importância que atribui à reflexão sobre as suas práticas, questionando-se sobre o que faz e se poderia fazer de outra forma. É este modo de encarar a sua profissão e esta busca continuada por novas metodologias de ensino que têm levado Ana a envolver-se em vários projetos. No trabalho que foi realizado neste estudo, em torno da discussão, reforça essa ideia sublinhando a sua preocupação, já com algum tempo, com o formalismo da linguagem matemática associada aos conteúdos algébricos:

> Na parte da Álgebra, eu acho que é outra vez para ver se, até que ponto aquilo que eu tenho feito nessa área é, pronto, o que se pretende, ou está correto, ou será que se pode ensinar isto de outra maneira, pronto, ou até o que me está a preocupar é um bocado o formalismo que não sei até que ponto é que está, é que não, eu se calhar descomplico em certas partes. (EI_set 2013).

Esses projetos em que tem participado proporcionam os desafios que Ana tem procurado ao longo da sua carreira, levando-a a desenvolver um novo olhar sobre as coisas e a enveredar por novas formas de reflexão:

> Acho que é sempre desafiante, por um lado, a solidariedade com quem está desse lado e, por outro, acho sempre que vale a pena experimentar uma maneira, há sempre uma maneira diferente de ver as coisas, pronto. Lembra-me que houve um projeto do José que era a comunicação na sala de aula (...) dei por mim a ligar a coisas que nunca tinha pensado e ainda foi poucos anos depois de ter feito estágio (...) aquela parte das didáticas não era muito desenvolvida na época (...) há sempre qualquer coisa de positivo que se colhe nestas coisas. (EI_set 2013).

Ana valoriza a participação em projetos de investigação por isso lhe permitir colaborar com investigadores e também porque vê nessas oportunidades uma forma de crescer profissionalmente. Por exemplo, no referido projeto de investigação sobre a comunicação matemática na sala de aula, destaca as aprendizagens realizadas sobre o tipo de questionamento a fazer aos alunos tendo em vista a sua aprendizagem: "A forma de colocar as perguntas (...) não se pensava muito na pergunta que se fazia para a turma, não se pensava no *feedback*, às vezes, se respondessem, se não respondessem não era por aí. (EI_set 2013).

Num outro projeto de investigação relacionado com a gestão curricular em que também participou, Ana salienta as aprendizagens realizadas sobre o uso didático da comunicação escrita, através da elaboração de relatórios de tarefas matemáticas pelos alunos, veiculando os raciocínios desenvolvidos:

> Houve uma fase que demos mais valor ao texto escrito (...) justificações (...) até porque é isso a nossa formação inicial não nos traz uma série de coisas e nós, por preguiça, não as procuramos (...) eu aproveito-me um bocadinho também do vosso trabalho, porque obriga-me a outro trabalho. (EI_set 2013).

A professora reconhece que as aprendizagens alcançadas através da sua participação nesses projetos têm repercussões na aprendizagem dos seus alunos, já que ao refletir introduz mudanças nas suas práticas e na atividade dos alunos:

> Obriga-nos a refletir. Se calhar repensamos as coisas e temos outros cuidados que se não existisse isto, não tinha acontecido. (...) A partir do momento que eu também reformulo e penso nas coisas de uma outra maneira (...) chamamos atenção de alguns assuntos que achamos mais pertinentes, insistimos em algumas coisas que sentimos que, por vezes, eles fazem alguns erros. (EF_jun 2014).

Para além do seu envolvimento em projetos, Ana procura manter-se atualizada através da participação em encontros de Matemática. Refere que, ao longo da sua vida de professora, frequentou durante muitos anos o Encontro Nacional de Professores de Matemática (*ProfMat*), por constituir mais uma oportunidade de aprendizagem:

> Frequentei o *ProfMat* assiduamente durante dez ou quinze anos, depois nos últimos anos não tenho ido (…) a vida familiar não tem permitido (...) era a oportunidade que eu tinha anualmente de ver qualquer coisa (...) nós aqui usamos sempre as calculadoras, então lá íamos nós para umas sessões, depois havia mais outras novidades. (EI_set 2013).

O discurso de Ana denota a sua preocupação em não cair na rotina e é na reflexão sobre as suas práticas que ela encontra mais uma forma de pensar sobre as coisas e procurar novas metodologias de ensino. Nesse sentido, procura refletir sobre as suas aulas, principalmente, quando se envolve no processo de planificação das aulas:

> Faço sempre algum balanço das aulas, quando, sobretudo quando estou a preparar a seguinte, apesar dos anos todos, eu continuo a ter a necessidade de fazer tudo (...) para me obrigar a adaptar alguma coisa que tem que ser diferente, ou para algum aluno em especial, ou para a turma em geral. (EI_set 2013).

Apesar da experiência profissional, ao refletir sobre o processo de ensino, Ana reconhece que ensinar não é somente influenciado pelo seu conhecimento mas também pelos seus alunos e suas características. Procura refletir com outros colegas, embora saliente que essa partilha ocorre, essencialmente, em encontros informais e é sobretudo sobre a exploração de tarefas em sala de aula. Sublinha, ainda, que apesar do grupo de professores ter uma vasta experiência de ensino, continuam a sentir necessidade dessa partilha de ideias:

> Até que uma tarefa, até banal mas ó pá olha que aquilo correu bem, experimenta aquilo, isso acaba por haver, mas é uma coisa muito informal. (...) É uma necessidade ou é um hábito, pronto. (...) É um bom hábito. (...) Eu não me lembro trabalhar aqui de outra maneira nesta escola (...) dúvidas, no intervalo é vulgaríssimo (...) agora já temos aquelas horinhas pronto. (EI_set 2013).

Ana destaca a importância das horas de coordenação disciplinar para a realização de trabalho de planificação e partilha entre os professores do departamento. Esse trabalho inclui, por exemplo, a realização de planificações gerais e pormenorizadas das aulas, a definição de tarefas a realizar com os alunos e a elaboração de instrumentos de avaliação:

> É sobretudo as planificações, semanalmente, agora como temos, chegamos mesmo a decidir os exercícios que vamos fazer do manual, acabamos por tentar fazer quase tudo. Os testes são sempre feitos em conjunto, nem há aqui ninguém que dê testes sem ser em conjunto. (EI_set 2013).

Ana salienta também a existência de assessorias como uma medida que reflete esse espírito de cooperação entre os professores, e com ganhos para a aprendizagem dos alunos: "Tivemos assessorias (...) vimos alguns resultados por parte dos alunos e (...) mais algum gosto (...) portanto, nessa parte, eu acho que houve essa parte positiva" (EI_set 2013).

Ana compara os dois Programas de Matemática do ensino básico (2007 e 2013), e o trabalho que foi realizado pelos professores com cada um deles, para apontar os aspetos negativos do de 2013:

> Bem, eu este ano estou traumatizada com o programa, porque eu fui das que ajudei, não implementei, mas ajudei, fui assessora logo desde o primeiro ano, porque a nossa escola foi escola piloto. (...) Eu tenho 7.º ano e estou a dar o programa que foi aprovado há dois meses (...) é voltarmos a estar sozinhos, voltar a pensar que há coisas que fiz ainda há dois anos e que agora vão deixar de estar. (EI_set 2013).

Apesar de tudo, o seu gosto pela profissão leva-a a sublinhar a prevalência dos aspetos positivos relativamente aos negativos.

Em resumo, Ana é uma professora que apesar da sua experiência profissional está frequentemente à procura de novos desafios, fundamentalmente, aqueles que lhe permitem lançar um novo olhar sobre as suas práticas. Por isso, gosta de participar em projetos, não se intimidando com as experiências que a convidam a sair da sua zona de conforto, na expectativa de realizar novas aprendizagens.

A preparação da discussão coletiva

Escolha das tarefas e propósito da discussão

Ana reconhece as tarefas como um elemento fundamental para promover a discussão matemática e atingir o(s) objetivo(s) estabelecido(s) para a aula. Em particular, salienta a *natureza* das tarefas como um fator decisivo para o envolvimento dos alunos na sua resolução. Considera que as tarefas não devem ser demasiado abertas, pois podem levar os alunos a afastarem-se do objetivo da aula:

> É muito importante o tipo de tarefas que, se calhar, lhes propomos, porque acho, se for uma coisa muito aberta há alguma tendência deles se perderem e nós também. (...) O objetivo depois não é alcançado com a facilidade que devia, sei lá, perde-se muito mais tempo. (EI_set 2013).

O discurso da professora evidencia que a escolha das tarefas é influenciada pelo propósito matemático da discussão. Para Ana, a natureza das tarefas a propor aos alunos depende, ainda, do tipo de trabalho que estão habituados a desenvolver, como se evidencia neste diálogo que mantém com o professor Jorge no grupo colaborativo:

> **Professora Ana:** Esta é engraçada mas depois perdemos aqui.
> **Professor Jorge:** Eu acho que esta ia correr mal.
> **Professora Ana:** E os meninos não estão habituados a este tipo de resoluções. (impercetível).
> **Professor Jorge:** Mas estamos a pensar trabalhar isto em quê? Em funções? Há uma relação entre duas variáveis. (impercetível) (...) A atividade em si é muito aberta. Não sei se depois os conseguimos levar. Tenho algumas reservas.
> **Professora Ana:** Também acho. (3.ª SC_2 dez 2013).

Tendo isto em conta, Ana, em conjunto com os seus colegas, adapta a tarefa *Inscrição no ginásio*, a partir de um conjunto de propostas apresentadas pela investigadora. De facto, essa tarefa surge com um pedido aberto (Explica que ginásio deve escolher o Santiago) a partir do qual os alunos iniciam a sua atividade.

As tarefas que Ana prepara para promover a discussão na aula foram de natureza diversificada, tendo em conta as caraterísticas referidas anteriormente, como não se afastarem do tipo de trabalho habitual dos alunos nem serem demasiado abertas. Naturalmente, a professora procura, ainda, selecionar tarefas que estejam de acordo com os conteúdos programáticos que está a lecionar, em articulação com os temas que estão a ser tratados na oficina de formação. O *desafio* proporcionado pelas tarefas selecionadas é também diverso, já que escolhe problemas para abordar com os alunos o tópico Equações – tarefas *A família Rosa* (Anexo 10) e *A cantina da escola* (Anexo 10). Estas tarefas pressupõem que os alunos interpretem e traduzam a informação dada em linguagem natural para linguagem matemática. Para explorar com os alunos os tópicos Sequências e regularidades e Funções, a professora opta por tarefas abertas e com níveis de desafio distintos. Enquanto as tarefas propostas no âmbito das sequências – tarefas *Palitos* (Anexo 10) e *Cubos com autocolantes* (Anexo 10) – são investigações, para estudar as funções seleciona uma tarefa de exploração – Tarefa *Inscrição no ginásio* (Anexo 10). Nas tarefas de investigação, os alunos podem apresentar diferentes estratégias de resolução, como a escrita de todos os termos de uma sequência, a escrita da lei de formação ou o uso de raciocínios que recorram às operações inversas e é na partilha de ideias que estabelecem conclusões e as generalizam – escrita e interpretação de diferentes expressões para o termo geral da sequência dada. As tarefas de exploração permitem aos alunos um trabalho diferente, mais encadeado em termos do nível de dificuldade e com uma exploração progressiva de ideias, que favorece o estabelecimento de conclusões.

As tarefas preparadas pela professora, no grupo colaborativo, surgem em *contextos* não puramente matemáticos e com oportunidades de aprendizagem distintas para os alunos. As tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades desencadeiam a atividade dos alunos a partir de duas imagens que sugerem a análise de duas sequências baseadas em construções com palitos e cubos. Ana considera que a abordagem mais favorável ao trabalho dos alunos neste tópico é a partir da apresentação de sequências pictóricas e não numéricas, principalmente, quando se pretende levar os alunos a escreverem com compreensão uma expressão para o termo geral de uma sequência:

> Eu por acaso acho que se isto fosse para iniciar, acho que isto não é mesmo a maneira mais agradável de os miúdos começarem. É sempre deste género que eles consigam associar o número da figura à figura que está em cima, porque se não, eu acho que aqui eles têm muita dificuldade em perceber a ordem, o que é a ordem, o que é o termo. Eu acho que não é mesmo por aqui que se devia ir. (...) Tem que ser qualquer coisa em que eles consigam estar a ver uma figura, olha esta está em primeiro lugar. (2.ª SC_24 out 2013).

Ana acentua a pertinência de os alunos relacionarem a escrita da expressão para o termo geral de uma sequência com a ordem da figura. É com base nessa convicção e experiência que Ana opta por selecionar as tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes* para explorar com os alunos no tópico Sequências e regularidades. As tarefas que seleciona apelam, ainda, ao trabalho dos alunos em situações que envolvem uma construção no plano e outra no espaço. Enquanto o primeiro caso (tarefa *Palitos*) se aproxima muito do trabalho que os alunos realizaram em anos anteriores, o segundo caso (tarefa *Cubos com autocolantes*) é uma novidade, por envolver uma construção no espaço.

As tarefas surgem num contexto de jogo de construção, onde os alunos determinam termos próximos e distantes e escrevem expressões para o termo geral da sequência subjacente à imagem dada. Adicionalmente, a tarefa *Palitos* solicita ainda a verificação da pertença de um dado termo à sequência e a interpretação e comparação de uma expressão dada para o termo geral da sequência com outra escrita pelos alunos. Essa tarefa surge estruturada em quatro questões com um nível de complexidade crescente.

As tarefas relacionadas com o tópico Equações (tarefas *A família Rosa* e *A cantina da escola*) também envolvem um contexto não puramente matemático e levam os alunos a lidar com informação apresentada em linguagem natural. Com o trabalho nessas tarefas, Ana pretende que os alunos traduzam informação de linguagem natural para matemática, depois de identificarem a incógnita e traduzirem as diversas informações dadas em função da incógnita escolhida. A atribuição da incógnita a informação diferente faz emergir a escrita de diversas equações para a mesma informação. Os alunos têm ainda de dar a resposta ao problema, tendo necessidade de interpretar o conjunto solução da equação escrita. Com esse propósito, para a escolha da ordem de apresentação das tarefas aos alunos, a professora privilegia aquela que lhe parece de mais fácil tradução para linguagem matemática, embora assuma que em termos de resolução possa implicar o trabalho com uma equação cuja resolução envolva mais procedimentos:

> Eu na altura fiquei na dúvida se devia dar primeiro aquela [tarefa *A família Rosa*]. Eu achei que realmente a equação seria mais complicada, mas a leitura do texto, a da cantina estava tudo mais direitinho. (...) Naturalmente, escreve-se essa equação. Eu ponderei (...) refleti um bocadinho, na véspera, e pensei aqui estava tudo direitinho. (8.ª SC_8 mai 2014).

Ana opta por apresentar inicialmente a tarefa *A cantina da escola*, por lhe parecer de mais fácil tradução de linguagem natural para matemática, já que era esse o seu objetivo. No caso de optar pela tarefa *A família Rosa* poderia comprometer a escrita de equações, trabalhando os alunos com estratégias menos formais.

Estas tarefas, embora mais próximas das que surgem nos manuais escolares, procuram despertar o interesse dos alunos para dar resposta a uma questão colocada: o número de almoços servidos na cantina de uma escola durante a semana e a idade dos vários membros de uma família. Ana, ao escolher estas tarefas, revela que para promover discussões coletivas, algumas tarefas apresentadas nos manuais escolares também cumprem esse objetivo, sem haver necessidade de preparar outros materiais.

A tarefa *Inscrição no ginásio*, para além de surgir em contexto não puramente matemático, tem, ainda, a particularidade de apresentar uma situação próxima dos interesses dos alunos, já que envolve a tomada de decisão acerca da escolha do melhor ginásio. Para tal, os alunos têm que analisar um conjunto de informação apresentada em linguagem natural e recorrer a diferentes tipos de *representações*. Nessa tarefa, os alunos preenchem uma tabela, elaboram uma representação gráfica e ainda escrevem expressões analíticas representativas das funções linear e afim: “Os alunos traçam as funções dos dois ginásios e ainda escrevem as expressões dessas funções” (NC_11 mar 2014).

As tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades também apelam a diferentes tipos de representações. Os alunos começam por analisar uma representação pictórica cujo objetivo é desencadear a sua atividade e levá-los à escrita de uma expressão para o termo geral da sequência, sugerida pela imagem: “A questão é chegar à expressão” (2.ª SC_24 out 2013). Reflete, ainda, no grupo colaborativo, que os alunos também devem ser capazes de explicar o raciocínio desenvolvido para a escrita dessa expressão: “Ver qual era a relação entre a ordem e a figura. (...) Mas não é o termo geral. É como chegas lá. Se calhar até é mais difícil chegar a esta (2.ª SC_24 out 2013).”

No tópico Equações, os alunos lidam com diferentes tipos de representações, já que é a partir da interpretação da informação dada em linguagem natural que desenvolvem outros tipos de representações, nomeadamente a escrita de uma equação.

Ana, depois de escolher as tarefas que pretende explorar com os alunos na aula, pensa sobre o propósito da discussão. Na sua preparação da aula, Ana identifica os *conceitos matemáticos* e os *objetivos específicos* desses conceitos:

> Com estas tarefas [*Palitos* e *Cubos com autocolantes*] pretendo trabalhar a escrita de termos gerais. Os alunos também determinam o número de palitos de algumas figuras e analisam uma regra que é dada. (NC_19 nov 2013).
>
> [Com a tarefa *Inscrição no ginásio*] O objetivo é eles chegarem à escrita de uma expressão para a função afim e para a função linear. Como eles também representam graficamente as funções veem algumas caraterísticas dessas funções. (NC_27 mar 2014).
>
> O objetivo para esta aula é resolverem problemas com equações [tarefas *A família Rosa* e *A cantina da escola*]. Eles podem fazer tentativas mas pretendo que eles consigam traduzir o problema por uma equação. (NC_27 mar 2014).

Na preparação da discussão coletiva, já no decurso da aula, Ana também identifica os *conceitos matemáticas* envolvidas nas produções dos alunos. Com as discussões em torno das tarefas do tópico Sequências e regularidades, tem como propósito favorecer a partilha de ideias relacionadas com a determinação de termos de uma dada sequência e a verificação da pertença de certo elemento à sequência: “Eles não têm dificuldade nenhuma em dizer quantos é que estão na 5.ª nem na 15.ª. Depois, eles vêm treinados do 6.º ano a fazer o termo geral e eles sabem fazer a operação inversa, tirar, dividir" (3.ª SC_2 dez 2013). Ana verifica que os alunos mobilizam conhecimentos prévios na resolução desta questão, recorrendo às operações inversas para verificar se um dado termo pertence à sequência dada. Ana, para além de identificar os conceitos matemáticos envolvidos nas suas resoluções, reconhece, também, os procedimentos mobilizados pelos alunos para responderem ao solicitado.

Em sala de aula, na preparação da discussão coletiva que tem por finalidade explorar ideias relacionadas com a função afim e a função linear, Ana, para além de identificar os conceitos matemáticos envolvidos nas resoluções dos alunos, apercebe-se das suas dificuldades. Destaca o trabalho profícuo dos alunos no preenchimento de uma tabela, que relaciona o número de meses de permanência no ginásio com o valor a pagar, e na elaboração de um gráfico com os dados dessa tabela. Contudo, salienta, também, as dificuldades sentidas pelos alunos na definição de uma possível escala para a construção da referida representação gráfica: "A primeira pergunta preencheram mais ou menos a tabela e depois o problema foi na segunda que era… Que era fazer o gráfico por causa da escala" (8.ª SC_8 mai 2014).

No acompanhamento do trabalho dos alunos nas tarefas relacionadas com o tópico Equações, Ana expressa o seu contentamento em relação à prestação dos seus alunos na resolução das tarefas, notando que eles conseguem traduzir o problema por uma equação, como ela pretendia, surpreendendo-a com a escrita de equações com denominadores e parêntesis: "Eu nesse dia estava muito orgulhosa dos meus meninos, a sério. Porque achei fantástico, esta equação aparece com parêntesis (...) com denominadores" (8.ª SC_8 mai 2014). Justifica a ocorrência dessa situação pela atribuição de diferentes designações à incógnita: "A turma estava dividida em três grupos [tipos de resoluções distintos] (...) há um grupo que faz a outra, há três grupos que faz esta, que é atribuir o *x* à segunda-feira" (8.ª SC_8 mai 2014).

Durante o acompanhamento do trabalho dos alunos, Ana sublinha o seu papel na motivação dos alunos para a resolução das tarefas e no desafiar dos alunos procurando outras abordagens:

> É claro que o nosso papel ali é um bocado isso, e é um bocado perceber, estando sozinha ia ter um bocado de dificuldade em acompanhar os grupos todos, até porque estava a surgir, em cinco grupos já havia três resoluções diferentes, por isso, depois às vezes o nosso papel, tem que ser motivar e olha que aqueles já estão a conseguir e não sei quê e depois até de veres o grupo que já acabou ires lá reforçar, dizer: olha que eles têm outra, tenta lá pensar noutra, por isso o nosso

papel realmente ali é um bocado gerir o interesse de uns e a falta de interesse de outros, espicaçando, vamos conseguir. (EF_jun 2014).

Ana reconhece a exigência do trabalho de acompanhamento e de ampliação das ideias dos alunos, em especial, quando é feito isoladamente. Contudo, destaca a sua pertinência para a identificação das estratégias de resolução que os alunos vão desenvolvendo e que será útil para a seleção de estratégias a partilhar em coletivo. Ana vê na colaboração com a investigadora uma mais valia para o desempenho da sua prática, em particular à promoção de discussões coletivas produtivas.

Na preparação do momento de discussão em sala de aula, Ana verifica que os alunos escrevem várias expressões para o termo geral da sequência apresentada na tarefa *Cubos com autocolantes*:

> Portanto, nesta aqui dos cubos é muito mais rica em termos de resoluções. Porque há o pessoal que acha que vai, são 4, 4 porque são estas voltas e 2 tampas, não é? Que é o $4n + 2$. Depois, há pessoal que assume que os dois cubos dos extremos têm sempre 5 autocolantes e por isso vão só fazer os do meio e quem pensa assim acaba por depois chegar a uma fórmula parecida com esta aqui [expressão apresentada na questão 4 da tarefa *Palitos*], é muito giro. (3.ª SC_2 dez 2013).

Contudo, Ana menciona, também, que os alunos revelam grandes dificuldades na explicação do raciocínio que lhes permite escrever essas expressões: "Escreveram o termo geral. E eu depois sublinhei em quase todos que [era necessário explicar] é explica. Aí era suposto eles terem dito mais qualquer coisa e eles não, não dizem nada, pronto foi aí" (3.ª SC_2 dez 2013). Reflete sobre estas dificuldades que os alunos manifestam na exposição das suas ideias, nomeadamente, na justificação dos raciocínios desenvolvidos, reconhecendo que há, ainda, um longo trabalho a desenvolver nesse sentido:

> Há meninos que (...) não são capazes de explicar o raciocínio aos colegas, ainda há esse trabalho que convém ser feito, até porque há alunos que sim, que estão já habituados desde pequeninos a que uma resolução matemática tem que ser acompanhada de um comentariozito, não é? Vê-se logo que há miúdos que têm logo essa tendência e percebem a importância disso que depois dá uns frutos tremendos ao longo dos anos. (EF_jun 2014).

Ana menciona que, para muitos alunos, a partilha de ideias decorrente da resolução de uma tarefa resume-se à apresentação à turma da sua estratégia de resolução, não reconhecendo a importância da explicação do seu raciocínio para os colegas que não resolveram a tarefa da mesma forma. Essa dificuldade tem repercussões no seu envolvimento na discussão coletiva. Contudo, também destaca que há alunos que veem na partilha de ideias uma forma de aprenderem Matemática e ajudarem os colegas a aprender. Ana, para além de destacar a dificuldade de alguns alunos em explicar os seus raciocínios, salienta a importância desse trabalho ser feito desde cedo com os alunos, mostrando-lhes a sua pertinência para eles próprios e para os colegas.

Quanto ao trabalho dos alunos com a tarefa relacionada com o tópico Funções, Ana menciona no grupo de formação que os alunos evidenciaram facilidade na generalização das ideias resultantes do seu trabalho individual, quando questionada pelo seu colega José: "E tiveram dificuldade a escrever as expressões? (Professor José) Não, nada, não (Professora Ana) (8.ª SC_8 mai 2014). Justifica essa ocorrência pelo trabalho feito previamente com as sequências: "Eles associaram muito isto ao trabalho das sequências" (8.ª SC_8 mai 2014). Para a aprendizagem dos alunos, considera vantajoso que o trabalho com as funções seja posterior ao trabalho com as sequências e regularidades: "Continuo a achar que primeiro as sequências e só depois as funções. Facilita, eu acho que para eles se torna mais agradável" (EF_jun 2014).

O envolvimento dos alunos na resolução de problemas com equações e partilha dessas ideias com a turma permite a generalização das relações apresentadas na informação dada em linguagem natural e consequente sistematização dessas ideias através de uma equação: "esta equação aparece com parêntesis" (8.ª SC_8 mai 2014). O objetivo de generalização das ideias matemáticas é alcançado, embora a professora tenha antecipado outras possíveis abordagens.

Em resumo, na escolha das tarefas a apresentar aos alunos, Ana mobiliza o seu *conhecimento dos alunos e da aprendizagem*, na medida em que procura que as tarefas estejam de acordo com o seu trabalho anterior. Ainda baseada nesse conhecimento, interligado com as suas perspetivas e com a sua experiência profissional, a professora sustenta que as tarefas a propor aos alunos não devem ser demasiado abertas.

Na preparação da discussão, antes e durante a aula, Ana atribuiu importância à definição clara do propósito do que se irá discutir, dando grande atenção aos conceitos matemáticos a salientar e que devem ser abstraídos e generalizados. Mobiliza o seu *conhecimento da Matemática* na preparação das suas aulas e, em particular, no momento da discussão, principalmente, na identificação dos conceitos matemáticos que pretende discutir e nas relações matemáticas que pretende generalizar. Usa também o seu *conhecimento do currículo e dos alunos e da aprendizagem* para a escolha da abordagem a propor aos alunos para a aprendizagem de um tema matemático. Na identificação das dificuldades que os alunos enfrentam no trabalho com as tarefas propostas e na identificação das estratégias que usam, mobiliza o seu *conhecimento da Matemática e da prática letiva*.

Estratégias de resolução

Na preparação da discussão coletiva, no sentido de antecipar possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos, Ana apoia-se no trabalho desenvolvido no grupo colaborativo. Prevê o uso da estratégia por *tentativa e erro* para todas as tarefas, embora com caraterísticas distintas. Nas tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes*, antecipa que os alunos podem recorrer a esta estratégia para continuar a sequência numérica subjacente à sequência pictórica apresentada. Na tarefa *Inscrição no ginásio*, pensa que os alunos podem recorrer a esta estratégia para determinar o valor a pagar num certo mês de atividade, a partir de raciocínios recursivos (adicionando sempre a mensalidade ao mês anterior). Nas tarefas *A família Rosa* e *A cantina da escola*, antecipa que os alunos podem escolher um número redondo para iniciar as suas tentativas. Essas tentativas podem ser organizadas em *tabelas*. A estratégia *tabular* surge de forma intencional na tarefa *Inscrição no ginásio*, onde os alunos são levados a preencher uma tabela incompleta para encontrarem o valor a pagar num determinado mês ou em que mês terão de pagar uma dada quantia. Para esse preenchimento, os alunos podem adicionar sucessivamente o valor da mensalidade até encontrarem o valor desejado, ou recorrer a um raciocínio mais "algébrico" que consiste na multiplicação do valor da mensalidade pelo número de meses e a adição do valor da inscrição, no caso em que se aplica – *Ginásio 100 calorias*.

A estratégia *algébrica* também é antecipada pela professora para todas as tarefas, já que é seu objetivo que os alunos generalizem as relações encontradas. Por exemplo, para a tarefa *Palitos*, Ana antecipa, durante o trabalho colaborativo, a escrita de diferentes expressões para o termo geral da sequência relacionadas com o número da figura:

> **Professora Ana:** Nós pensámos que temos sempre duas filinhas de fósforos. E as duas linhas horizontais têm sempre tantos fósforos como o número da figura,

portanto, duas vezes n, $2n$. Depois, temos sempre 3 pauzinhos ao alto. Temos sempre mais 1 que o número da figura, mais $n + 1$. (...) A $3n + 1$. Tínhamos as duas bases outra vez e ainda temos mais 2 verticais. Será múltiplo de 3. Já sei que é $3n$ e agora vou ali à procura.
Investigadora: E esta configuração? (C)
Professora Ana: Pronto, exato. Exato. Exatamente. E depois, fechas. Sim senhora. (2.ª SC_24 out 2013).

O discurso de Ana mostra a importância que atribui à escrita da expressão relacionada com a ordem da figura. O seu conhecimento e a sua experiência profissionais sugerem que esse é o caminho mais adequado para explorar com os alunos a escrita com compreensão do termo geral de uma dada sequência.

Para as tarefas *A família Rosa* e *A cantina da escola*, Ana antecipa a escrita de diferentes equações em função da designação da incógnita: "Se os alunos atribuírem o x a diferentes dias da semana, vão aparecer equações diferentes, o que é giro para comparar" (NC_30 abr 2014). Na tarefa *Inscrição no ginásio*, a estratégia algébrica também é antecipada para a escrita de uma expressão que traduza o valor a pagar em cada ginásio em função do tempo de permanência – expressão da função afim e da função linear: "Na questão 4, os alunos vão escrever a expressão de cada ginásio" (NC_11 mar 2014).

A professora atribui grande importância a este momento de preparação da discussão coletiva: identificação de estratégias que os alunos podem usar na resolução das tarefas que lhe são propostas. Considera que esse trabalho tem reflexos positivos na aprendizagem dos alunos, já que eles mobilizam essas estratégias em situações futuras:

> Eu não fazia de forma tão cuidada a preparação das aulas no sentido de antecipar as resoluções. (...) O facto de se insistir um bocado na organização dos dados, de haver umas tabelas, que podem ajudar (...) voltou acontecer em testes, aquilo funcionou, aquilo foi claro para eles, organizar o texto, organizar o que lhes é dado no texto numa tabela, isso trouxe-lhes alguma segurança e vi que pode haver coisas que vamos continuar a dar porque funcionaram e vale a pena insistir. (EF_jun 2014).

A professora destaca a estratégia tabular como um aspeto marcante do trabalho dos alunos na resolução de diversas tarefas, que é mobilizada noutras situações, como em momentos de avaliação escrita. O facto de os alunos recorrerem a essa estratégia para resolverem outras tarefas propostas evidencia que reconheceram potencialidades no uso dessa estratégia.

Em linha com o exposto, Ana refere a reflexão do texto *Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios* (Canavarro, 2011) como um marco para a mudança nas suas práticas, fundamentalmente, na antecipação de possíveis estratégias que os alunos podem usar na resolução das tarefas e na partilha dessas ideias em coletivo:

> Eu não me lembro de ter tanto essa preocupação. Foi depois daquele texto, de vermos aquelas etapas e não sei quê. (...) E até, por exemplo, no 12.º ano a dada altura eu dei por mim a ter mais algum cuidado e a dada altura eu dei por mim em coisas mais complicadas eu tentar, tentar ver, isso já com antecipar algumas, claro que às vezes é giro termos surpresas, não é? (EF_jun 2014).

Em sala de aula, ao mesmo tempo que acompanha o trabalho autónomo dos alunos, a professora identifica as estratégias de resolução que os alunos usam nas tarefas, tendo em vista a preparação da discussão coletiva. A estratégia que recorre à *tentativa e erro* é sempre usada por alguns alunos nas diversas tarefas. Na tarefa *Palitos*, os alunos recorrem também à estratégia de tentativa e erro para verificar se um certo elemento é termo da sequência: "Os alunos fazem tentativas para verificar que 76 é termo da sequência, mas o engraçado é que eles multiplicam logo 3 por 25 e somam 1. Não continuam a sequência. Já têm em mente o termo geral" (NC_19 nov 2013). A professora destaca o raciocínio sistemático deste grupo de alunos para verificar a pertença de um certo elemento à sequência dada, favorecida, possivelmente, pela identificação do termo geral da sequência mesmo ainda não tendo sido pedido.

Na tarefa *A família Rosa*, os alunos também recorrem à estratégia por tentativa e erro para responder ao problema, iniciando as suas tentativas num número redondo (10):

> **Investigadora:** Tivemos uma resolução por tentativas. Aqui começaram pelo 10.
> **Professora Ana:** Como os números eram pequeninos.
> **Investigadora:** Começaram neste e depois foram fazendo os ajustes e logo à terceira tentativa tinha. (8.ª SC_8 mai 2014).

Ana justifica o aparecimento desta estratégia pelo facto de a tarefa proposta envolver a manipulação de números pequenos, já que dizia respeito às idades de uma mãe e dos seus filhos. Neste caso, a escolha do 10 pode estar associada à atribuição da incógnita à idade de um dos filhos e descoberta das outras idades em função dessa.

Na tarefa *A cantina da escola*, os alunos recorrem também à estratégia por tentativa e erro, mas as tentativas denotam um raciocínio metódico, correspondente à interpretação das condições apresentadas no enunciado da tarefa:

> Em relação à outra tarefa [*A cantina da escola*], eu tinha-a testado também nas outras turmas. (…) Em todas elas há um grupo que faz mais por tentativas, mas o engraçado nos outros é começar por um número redondo. Portanto, começam por 100 e depois vão subindo ou descendo. Não tem nada a ver com esta que dividem logo. (8.ª SC_8 mai 2014).

Tendo por base esta estratégia de resolução, Ana destaca a ocorrência de duas situações que mobilizam raciocínios distintos: numa, os alunos experimentam valores arbitrários iniciando por números redondos; na outra, analisam as condições dadas no enunciado da tarefa e começam por testar um número que esteja de acordo com os dados apresentados na tarefa, especificamente, começam por retirar ao total de almoços o número de almoços conhecidos e, de seguida, dividem o resultado pelos quatro dias da semana.

A estratégia *tabular* surge na resolução da tarefa *Inscrição no ginásio* como uma forma eficaz de análise das condições oferecidas por dois ginásios e como um auxílio à tomada de decisão fundamentada acerca do ginásio mais vantajoso: "Há alunos que continuam a tabela da primeira questão e outros que constroem uma nova tabela onde registam para todos os meses o valor a pagar em cada ginásio" (NC_11 mar 2014). Neste caso, a estratégia tabular afigura-se como um procedimento mais metódico comparativamente à estratégia por tentativa e erro. Na primeira questão desta tarefa, os alunos preenchem a tabela sem revelarem dificuldade tendo necessidade, alguns alunos, de acrescentar os meses em falta, já que os indicados não eram meses consecutivos, recorrendo de seguida à adição sucessiva da mensalidade: "Põem por cima ou à frente os valores que faltam" (NC_11 mar 2014). Essa tabela apoia a elaboração gráfica que os alunos têm de fazer na questão seguinte: "Só há um grupo que põe à frente do gráfico os cálculos para cada mês" (NC_11 mar 2014).

Muitas vezes, os alunos organizam numa tabela a estratégia de resolução por tentativa e erro, como aconteceu na tarefa *A cantina da escola*: "Havia um elemento no grupo que queria fazer por equações e os outros não o ouviram. E ele ficou chateado e nesta deixou todos fazer por uma tabela e ele faz uma equação sozinho e acabou-se" (8.ª SC_8 mai 2014). O discurso da professora mostra, também, que os alunos recorrem à resolução que envolve procedimentos *algébricos*, neste caso uma equação. Nesta tarefa, os alunos escrevem diferentes equações para a mesma interpretação da informação apresentada no enunciado da tarefa, como antecipado:

> A turma estava dividida em três grupos [resoluções], já agora só para terem uma ideia, há um grupo que faz a outra, há três grupos que faz esta, que é atribuir o x à segunda-feira. (...) Esta é escolhida por três grupos e depois então agora a outra é (...) a terça-feira, exato. Portanto segunda-feira é x menos 100, terça é x, quarta é x sobre 2 e depois. Estão a ver, na segunda aula com problemas. (...) Esta resolução aparece uma vez ainda, pronto, acho que é giro. Com parêntesis, com denominadores. (8.ª SC_8 mai 2014).

Ana salienta o aparecimento da estratégia algébrica na sua turma, em detrimento de outras, como a estratégia por tentativa e erro. Frisa, ainda, o facto de os alunos atribuírem diferentes designações à incógnita, o que conduz à escrita de distintas equações que mobilizam procedimentos diferentes na sua resolução, nomeadamente, o uso de parêntesis e denominadores, no caso em que atribuem a incógnita ao dia terça-feira. A atribuição de designações diferentes à incógnita volta a surgir na tarefa *A Família Rosa*: "3 grupos com a Maria e um grupo e mais o Augusto com a outra [a incógnita designa a idade da Sara]" (8.ª SC_8 mai 2014).

A estratégia algébrica é usada também pelos alunos na tarefa *Palitos*, onde escrevem uma expressão para o termo geral da sequência, identificando o padrão repetitivo e fazendo os ajustes necessários em função do primeiro termo:

> Pulinhos, pulinhos, "tã tã" e depois chegam, avançam ou diminuem de acordo com o primeiro termo pronto, não é? E até explicam (...) eles estavam é um bocado formatados (...) para chegar aquele termo geral que eles conheciam, pronto. E o resto não tinham vontade nenhuma de ver outras coisas. Foi um bocado isso, fiquei um bocadinho tristinha, porque parecia que eles não andavam. (3.ª SC_2 dez 2013).

Deste modo, Ana identifica o desenvolvimento de certos tipos de raciocínio, como a adição do padrão repetitivo, como uma limitação à análise de outros tipos de expressões por parte dos alunos. Reconhece que os alunos não estão habituados a desenvolver um tipo de raciocínio baseado na escrita de um expressão de acordo com o número da figura, mas focando-se, principalmente, na sequência numérica subjacente à construção apresentada e consequente identificação do padrão numérico repetitivo. Este aspeto é identificado por Ana como um obstáculo à interpretação de uma expressão dada para o termo geral da sequência apresentada na tarefa *Palitos*, onde os alunos teriam de explicar qual teria sido o raciocínio desenvolvido para a escrita da referida expressão:

> Depois a pergunta 4, que era chegar a este termo (...) só um grupo tentou aproximar-se ou nem isso. (...) Eles não perceberam (...) eles quase que chegavam a dizer que era o 4 vezes o n menos o $n-1$ (...) foi muito difícil (...) porque a partir do momento que eles aqui põem, põem os números que estão de palitos eles aí pronto, aquilo já não dá, está a saltar de quanto em quanto, não vou tentar mais. (3.ª SC_ 2 dez 2013).

Ana destaca a dificuldade que os alunos enfrentam na interpretação de uma expressão para o termo geral da sequência diferente da escrita por eles. Essa dificuldade resulta de os alunos traduzirem a sequência pictórica por uma sequência numérica e escreverem a expressão para o seu termo geral baseada apenas no padrão numérico repetitivo, que permite passar de uns termos da sequência para os outros, desligada da análise do padrão que configura a imagem. A professora justifica, ainda, essa ocorrência pelo tipo de trabalho que os alunos estão habituados a fazer em anos anteriores: "Esta se calhar é mais próxima daquilo que eles estavam habituados (...) eles estavam é um bocado formatados, foi a pena que eu achei, estavam muito formatados para aquele tipo de, para chegar aquele termo geral que eles conheciam, pronto" (3.ª SC_ 2 dez 2013). As experiências prévias dos alunos podem comprometer o trabalho a realizar no futuro, principalmente, quando são levados a interpretar e justificar raciocínios matemáticos desenvolvidos por outras pessoas, formalizados em linguagem algébrica. Para o desenvolvimento da justificação e interpretação de expressões dos termos gerais de sequências é fundamental, na opinião de Ana, a análise do padrão que configura a imagem: "Sobretudo aqui nesta de explica, eles não estavam, porque para eles isto era uma fórmula e portanto não tentaram em altura nenhuma perceber que esta fórmula podia ter a ver com alguma coisa que estavam a ver" (3.ª SC_2 dez 2013).

Para Ana, o facto de os alunos na tarefa *Cubos com autocolantes* não terem convertido a sequência pictórica numa sequência numérica, talvez tenha resultado numa aprendizagem mais significativa por parte deles, principalmente, na escrita de diferentes expressões para o termo geral da sequência:

> Eu acho que esta aqui resultou de outra maneira, porque não, porque era uma figura no espaço eu acho que teve aqui qualquer coisa, o reconhecimento (...) para eles terem aquela ideia do andar à volta e não sei quê, eu acho que ali entenderam esta como uma coisa diferente, não sei, talvez por isso, e não se

preocuparam tanto em fazer logo os números. (...) Portanto, nesta aqui dos cubos é muito mais rica em termos de resoluções. Porque há o pessoal que acha que vai, são 4, 4 porque são estas voltas e 2 tampas, não é? Que é o $4n + 2$. Depois, há pessoal que assume que os dois cubos dos extremos têm sempre 5 autocolantes e por isso vão só fazer os do meio e quem pensa assim acaba por depois chegar a uma fórmula parecida com esta aqui, é muito giro. (3.ª SC_ 2 dez 2013).

Ana salienta, pela positiva, o trabalho dos alunos nesta tarefa por ter favorecido a escrita de diversas expressões para o termo geral, relacionando com o número da figura. Embora não tenha formalizado na sua intervenção a expressão do termo geral da sequência a que se refere no segundo momento da sua fala, fica claro que a expressão é $5 + 4(n - 2) + 5$ ou $10 + 4(n - 2)$.

Ana salienta a tarefa *Cubos com autocolantes* com uma mais valia ao trabalho realizado pelos alunos na tarefa *Palitos*, ao fazer emergir a escrita de diferentes expressões para o termo geral da sequência, justificada, na sua opinião, pelo envolvimento de uma construção no espaço. Para Ana, a tarefa *Palitos* conduziu os alunos à tradução da sequência pictórica para a sequência numérica e, consequentemente, à escrita da expressão baseada no padrão repetitivo que permite passar de uns termos para os outros na sequência numérica. No entanto, esta tarefa (*Palitos*) introduz um aspeto bastante importante no trabalho com a Álgebra – interpretação e explicação de uma expressão para o termo geral da sequência apresentada. Este elemento distintivo marca bem a diferença do trabalho realizado pelos alunos em anos anteriores.

Na tarefa *Inscrição no ginásio*, a estratégia algébrica também surge nas resoluções dos alunos, já que eles eram convidados a escrever a expressão analítica que traduzisse o valor a pagar em cada ginásio de acordo com o tempo de permanência: “Eles escreveram a expressão de cada ginásio. O que distinguiu, aqui, foi o facto de uns terem usado o x e outros o n. Houve também um grupo que em vez de escrever uma expressão escreveu a lei de formação” (NC_11 mar 2014). As expressões escritas pelos alunos são representativas da função afim e da função linear. Ana justifica o uso de letras distintas para representar a incógnita, com o facto de uns terem interpretado a tarefa como uma situação envolvendo o conteúdo das funções e outros das sequências: “Eles associaram muito isto ao trabalho das sequências. (...) Foi giro” (3.ª SC_2 dez 2013).

Em síntese, Ana usa o seu *conhecimento da Matemática* na antecipação de diversas estratégias que os alunos podem desenvolver na resolução das tarefas propostas, em especial a que recorre à tentativa e erro, ao uso de tabelas e à álgebra. Em sala de aula, apoiada também no seu conhecimento da Matemática, Ana identifica, nas resoluções dos alunos, as estratégias antecipadas. Em particular, identifica a estratégia por tentativa e erro na tarefa *Palitos* e nas tarefas relacionadas com o tópico Equações. Contudo, na tarefa *A cantina da escola*, os alunos, embora recorrendo à tentativa e erro, baseiam-na num raciocínio mais organizado, correspondente à divisão equitativa do número de almoços pelos dias da semana, depois de terem subtraído ao total de almoços servidos o número de almoços conhecido, não começando por experimentar valores arbitrários. A estratégia tabular surge nas resoluções dos alunos quer como forma de organizar as suas tentativas, quer como auxílio à tomada de decisões e à elaboração da representação gráfica, como é o caso da tarefa *Inscrição no ginásio*. A estratégia algébrica surge nas resoluções de todas as tarefas propostas, visíveis na escrita de expressões para o termo geral de sequências pictóricas, na escrita de equações correspondente à tradução de informação apresentada em linguagem natural e na escrita de expressões representativas da função afim e da função linear.

Ana mobiliza, ainda, o seu conhecimento da Matemática em articulação com o da aprendizagem e dos alunos na identificação das causas para a dificuldade dos alunos em interpretar e explicar uma expressão para o termo geral da sequência, na tarefa *Palitos* e, também, na justificação para o aparecimento de uma dada expressão para o termo geral (familiar aos alunos), baseada no padrão repetitivo da sequência numérica subjacente à sequência pictórica.

A professora destaca as aprendizagens realizadas com a sua participação no grupo de formação, em particular no que se refere à antecipação de possíveis estratégias de resolução a desenvolver pelos alunos no seu trabalho com as tarefas propostas.

Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação

Na sua planificação da aula, Ana pensa em selecionar resoluções que envolvam *representações* diversificadas, como as que recorrem a tabelas, representações algébricas e não algébricas, de modo a evidenciar a transição da *linguagem matemática informal* para a *formal*: "Começar pelas mais simples e evoluir para as mais complexas" (NC_19 nov 2013). Em particular, Ana reforça esta ideia no que se refere às tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades: "As sequências, eu acho que é um assunto que me leva pronto, eu acho que é giro se eles pensarem naquilo mais como um jogo, como uma lógica e depois passa-se à formalização" (EI_set 2013). Quando Ana usa a metáfora de jogo é para evidenciar a importância dos alunos analisarem o padrão que configura a imagem e escreverem, posteriormente, uma expressão para o termo geral que revele essa compreensão, relacionando a expressão do termo geral com a ordem da figura.

Em sala de aula, o acompanhamento que a professora faz ao trabalho dos alunos permite identificar as *representações* usadas e os conceitos e procedimentos mobilizados nas suas resoluções. Ana seleciona as resoluções que envolvem representações não algébricas para iniciar a apresentação de estratégias, no caso da tarefa *A cantina da escola*: "Apenas um dos grupos resolveu o problema por tentativa e erro tendo, no entanto, denotado um raciocínio consistente" (9.ª SC_ 15 mai 2014). Quando Ana se refere ao raciocínio consistente é para salientar que os alunos não experimentam valores arbitrários para o número de almoços de segunda-feira, mas começam por analisar as condições do enunciado e dado que o número de almoços de sexta-feira é conhecido, começam por retirar ao total. De seguida, dividem o resultado pelos restantes dias da semana. Apesar, de apenas um grupo ter seguido essa estratégia de resolução (tentativa e erro), Ana esperava que fosse adotada por mais grupos: "Eu estava convencida que esta resolução [por tentativa e erro] até ia aparecer em mais grupos" (8.ª SC_8 mai 2014).

Ana avança, seguidamente, para a seleção das resoluções que envolvem representações algébricas:

> A maioria dos grupos utilizou resoluções algébricas, embora diferentes de grupo para grupo. (...) Esta resolução foi adotada por dois grupos, é a resolução que nos parece mais espectável [atribuição da incógnita à segunda-feira], de acordo com a leitura do enunciado. (...) Nesta resolução, a variável representa o número de almoços de terça-feira, tendo contribuído para uma maior complexidade da equação. (9.ª SC_ 15 mai 2014).

Ana destaca a estratégia algébrica como a preferida por este grupo de alunos na resolução da tarefa *A cantina da escola*, que, na sua perspetiva, se justifica pela tarefa que tinham realizado na aula anterior: "Fazendo a análise das diferentes resoluções dos alunos, parece-nos que, de certo modo, os alunos transferiram para esta tarefa, os processos aplicados na resolução da tarefa da aula anterior" (9.ª SC_ mai 2014). Essa justificação é também válida para a atribuição da incógnita a diferentes dados do enunciado. Ana salienta também que esse facto ocasionou a escrita de diversas equações para a mesma interpretação da informação apresentada em linguagem natural, que implicou a mobilização de procedimentos matemáticos diferentes, neste caso o uso de denominadores e parêntesis.

Para Ana, nesta tarefa, é evidente que "Os alunos mostram ser capazes de estabelecer estratégias informais e, progressivamente, de usar também estratégias mais formais para resolver problemas o que pressupõe o desenvolvimento da sua compreensão da linguagem algébrica" (RI_jul 2014). Desta forma, Ana, ao optar por esta sequência para apresentação das estratégias dos alunos, mostra que pretende levá-los a transitar do uso de linguagem matemática informal para o uso de linguagem matemática formal. Ana menciona novamente o texto discutido na 2.ª SC como uma aprendizagem importante para a seleção das estratégias a discutir na turma e a ordem pelas quais devem ser apresentadas:

> Naquele caso a opção, eu estou-me agora a lembrar daquela, daquela, daquele artigo que nós lemos e que tinha a ver com as opções, quem é que se escolhe para apresentar e no outro dia estivemos a falar nisso, e nem sempre aquilo é uma coisa muito refletida, julgo eu. Naquele dia, foi uma coisa mais ou menos óbvia, íamos chamar, eram três resoluções. (...) Porque às vezes, não, se à partida vejo que há mais que uma resolução que tenha piada e que valha a pena eu privilegio e vão logo dois ou três ao quadro. (...) Agora, às vezes questiono-me se quem vai ao quadro serão os alunos certos (...) eu quando há um aluno menos bom e que tem uma resolução (...) eu tento privilegiar, mas nem sempre se calhar sigo os passos que nós tínhamos falado para gerir. (EF_jun 2014).

Ana, ao refletir sobre a complexidade desse processo, questiona-se sobre a forma como o faz. Para Ana, no caso da tarefa *A cantina da escola*, a sequenciação era evidente: começar pelas estratégias que não envolvem representações algébricas e evoluir para as que usam. Na sua prática diária, considera que nem sempre a sequenciação é tão linear nem tão refletida, questionando-se sobre a sua forma de agir e sobre as escolhas que faz. Salienta a importância desses momentos para levar os alunos com mais dificuldades a envolverem-se nessa partilha de ideias. O discurso de Ana denota, também, a importância que dá à reflexão sobre as suas práticas e como traz para o seu quotidiano a reflexão sobre assuntos discutidos no grupo colaborativo.

Ana reconhece que ao selecionar as estratégias a discutir favorece a participação dos alunos que não o fazem autonomamente, dando-lhes, assim, oportunidade de se envolverem na discussão coletiva: “Até porque às vezes há uma menina que é muito tímida e nunca vai revelar, então temos que ser nós a ir lá (...) se não nunca aparece” (2.ª SC_24 out 2013).

Nas tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades, a estratégia envolvendo representação algébrica surge de forma intencional no pedido de escrita de uma expressão para o termo geral da sequência dada, onde os alunos conseguem escrever várias expressões da sequência apresentada, na tarefa *Cubos com autocolantes*: “Depois no quadro chegámos, a nossa turma, a ter três formas já com aspetos diferentes, pronto, e acabaram por achar mais graça até à detrás que é giro, pronto” (3.ª SC_2 dez 2013). Ana seleciona para primeira apresentação na discussão coletiva a estratégia mais frequente, avançando, de seguida, para a menos frequente: “Quase todos foram ao $4n + 2$ mas houve um grupo que pensou de outra maneira” (NC_19 nov 2013).

Na tarefa *Palitos*, a estratégia que recorre a representação algébrica também é usada pelos alunos na verificação da pertença de um certo termo à sequência dada, através do recurso às operações inversas subjacentes à expressão do termo geral:

> **Professor Afonso:** Diz-me só, na segunda pergunta eles respondem pelas operações inversas?
> **Professora Ana:** Foi, foi, foi. Mas isso também já estão formatados do 6.º ano. Eles estavam habituados. Eu não tive que lhes ensinar nada. Eles foram logo, tiraram, dividiram, “tã, tã, tã”. (3.ª SC_2 dez 2013).

Ana salienta que o recurso a este tipo de procedimento é consequência do trabalho realizado no ciclo anterior e que é compreensível pelo facto dos alunos ainda não dominarem a resolução de equações.

A representação algébrica emerge também na tarefa *Inscrição no ginásio*, já que os alunos foram desafiados a escrever expressões que representassem os valores pagos em cada um dos ginásios, em função do tempo de permanência: “Na última pergunta tinha três resoluções: uma pela lei de formação, outra que usava o x e outra o n. Achei que era importante eles apresentarem as três e verem as diferenças” (NC_ 11mar 2014). Ana, ao optar por selecionar as três estratégias para serem apresentadas em coletivo, está a privilegiar a exposição de diversas formas de representar uma generalização e a evidenciar uma progressão relativamente ao uso da linguagem matemática envolvida nessa generalização, desde a *linguagem matemática informal* – lei de formação – até à *linguagem matemática formal* – expressão algébrica e nesta que podem recorrer a diferentes letras para designar a variável.

Na tarefa *Inscrição no ginásio*, a representação tabular surge de forma intencional na proposta apresentada aos alunos, onde eles recorrem a raciocínios recursivos para a completar: “Na primeira, que era o preenchimento da tabela, o grupo que apresentou introduziu na tabela os meses em falta. Houve também grupos que preencheram a tabela apenas para os valores pedidos” (NC_ 11 mar 2014). Neste caso, os alunos adicionam a cada mês a respetiva mensalidade para encontrar a totalidade do valor pago no mês seguinte. Ana justifica a escolha do grupo que introduz os meses em falta por considerar que favorece a compreensão: “os alunos percebiam melhor de onde vinham os valores” (NC_ 11 mar 2014).

A representação tabular surge, ainda, nesta tarefa como uma forma de apoiar os alunos na tomada de decisão acerca do ginásio mais vantajoso: “Na terceira, o grupo que apresentou continuou a tabela da primeira questão. Não havia necessidade de estar a construir a tabela do início” (NC_ 11 mar 2014).

A representação gráfica também surge intencionalmente nesta tarefa: “Na segunda, que era a construção do gráfico, uns fizeram de 45 em 45 e outros de 50 em 50” (NC_ 11 mar 2014). Ana optou por escolher, para apresentar, os dois tipos de resolução, por considerar ser importante analisar com os alunos a influência da escala na representação dos valores da tabela: “alertar os alunos para as diferentes escalas que podiam usar” (NC_11 mar 2014). Ana destaca, neste caso, a escala escolhida pelos alunos para representação do valor pago em cada um dos ginásios na mesma representação gráfica, dado que a escolha dessa escala levantou alguns problemas aos alunos – “O problema foi na segunda que era, que era fazer o gráfico por causa da escala” (8.ª SC_8 mai 2014)” – que na sua perspetiva se justifica pelo facto de estarem mais habituados a trabalhar com escalas em que os números estão representados de dez em dez no eixo das ordenadas: “Não eram bonitos, como eles gostavam, não é? Não era de 10 em 10” (8.ª SC_8 mai 2014). Ana reconhece que no momento da preparação desta tarefa este foi um aspeto não antecipado como problemático para os alunos:

> Mas se calhar também, da nossa parte, na altura quando pensámos na tarefa se calhar nós também não refletimos (...) não imaginámos que podia ser um problema deles, porque realmente isto não dava números muito bonitos. Dava números muito feiosos. (8.ª SC_8 mai 2014).

Ana salienta, ainda, que a representação gráfica permite aos alunos verificar algumas características da função linear: "Uma vai ter a linear, os pontinhos todos alinhados e outra…" (3.ª SC_2 dez 2013).

Em resumo, na preparação prévia do momento de discussão, Ana prevê selecionar para apresentação e discussão na aula estratégias que recorram a representações diversificadas e pensa organizar as intervenções dos alunos, de acordo com a seleção feita e de modo a privilegiar a transição da linguagem matemática informal para a formal, com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico e, principalmente, à generalização das ideias matemáticas em jogo. Em sala de aula, face ao que observa, escolhe resoluções que empregam diversas representações, como antecipado. Nas tarefas relacionadas com as Equações, inicia pelas que recorrem a representações não algébricas e evolui, posteriormente, para as que mobilizam representação algébrica. A representação algébrica é também identificada por Ana, nas resoluções dos alunos, nas tarefas envolvendo as sequências, concretizadas na escrita de expressões para o termo geral da sequência e na verificação de pertença de um certo termo à sequência. Neste caso, decide começar pelas estratégias mais frequentes nas resoluções da turma. Na tarefa relacionada com as Funções, Ana também sinaliza a representação algébrica na escrita de expressões representativas das funções afim e linear e a estratégia tabular no preenchimento de uma tabela incompleta e no uso da tabela como um meio eficaz à tomada de decisão acerca do ginásio mais vantajoso.

Ana recorre ao seu *conhecimento da Matemática* na seleção das estratégias a apresentar e da *aprendizagem e dos alunos* na sequenciação que estabelece para os convidar a partilhar as suas estratégias de resolução e levá-los a atingir o objetivo da aula, envolvendo-se na partilha e discussão coletiva. Mobiliza também esse conhecimento na escolha dos grupos para apresentar as suas ideias, convidando alguns dos seus elementos a intervir na discussão que de outra forma não participariam, pelas suas próprias características. O seu *conhecimento da prática letiva* surge interligado com estas duas outras vertentes do conhecimento, nomeadamente, na forma como promove o encadeamento dos raciocínios dos alunos para se tornarem compreensíveis para todos e no modo como os ajuda a evoluir de uma linguagem matemática informal para a linguagem algébrica.

A dinamização da discussão coletiva

Componentes da discussão, discurso

Ana inicia o momento de partilha e discussão de ideias em coletivo com o convite a grupos específicos, uma vez que no momento de monotorização do trabalho autónomo dos alunos identifica as várias estratégias de resolução usadas por eles, já que como refere, "eu passo as aulas todas a cuscar, eu não paro na sala de aula" (EI_set 2013). Assim, opta por iniciar a *apresentação* de ideias com a estratégia mais frequente, no caso da segunda questão da tarefa *Palitos*:

> Na segunda questão houve cinco grupos que fizeram uma continha, porque vocês, a maior parte de vocês tinha dito que já tinha pensado nas operações inversas quando estavam no 5.º ou 6.º ano. Por exemplo, tenho só aqui dois grupos que não fizeram, que fizeram de outra maneira. (...) Tudo que aí puseram, está bem? (...) Para além do grupo da Vera, deve haver mais quatro grupos e portanto mais meninos a reconhecer aquela resolução, sim? E depois ainda verificaste, foi? (...) Então agora, alguém que tenha a resolução idêntica à da Vera quer explicar como é que… A Constança. Ó pessoal vamos estar atentos, vamos ouvir o que a Constança vai dizer. (Aula_Sequências_nov 2013).

Ana inicia a discussão comunicando o número de resoluções diferentes que surgiram na turma. Com isso, pretende despertar o interesse dos alunos para analisarem outras formas de resolução. Tem, também, o cuidado de alertar os alunos para a proximidade da resolução apresentada com a de mais quatro grupos, com vista a envolver os alunos na apresentação da estratégia de resolução que vai ser exibida. Com essa decisão, Ana pretende que os alunos, posteriormente, juntem contributos, ou completem justificações ao que vai ser exposto, já que desenvolveram o mesmo tipo de estratégia.

Enquanto a aluna regista a sua resolução no quadro, a professora vai começando a oferecer algumas interpretações para o raciocínio exposto, sem interagir com a turma nem com a aluna que está a transcrever a sua resolução. Tudo indica que pretende despertar o interesse dos alunos para os aspetos importantes a mencionar na exposição e justificação dos seus raciocínios. Informa que a aluna, depois de encontrar a resposta, sente necessidade de fazer a verificação do valor encontrado.

Atendendo à particularidade dessa estratégia ter sido apresentada por diversos grupos, prefere convidar um outro aluno para explicar o raciocínio subjacente à resolução, como mostra o diálogo seguinte:

> **Constança:** Nós já sabíamos que a lei de formação era $3n + 1$ e então fizemos a operação inversa, fizemos $76 - 1$ a dividir por 3.
> **Professora Ana:** Porque já tinham a lei de formação.
> **Constança:** Sim.
> **Professora Ana:** Então e quem não tem a lei de formação como é que resolveria? Não resolve? (...) Já agora vejam as outras resoluções. O que é que está aqui acontecer na resolução deste grupo? Ou do grupo da Eva?
> **Aluno:** É o termo geral.
> **Professora Ana:** É o termo geral outra vez. É uma concretização da Vera, já viram? (...) Perceberam o que aconteceu aqui? (...)
> **Aluno:** Então e como é que eles descobriram que era logo o 25?
> **Professora Ana:** Tens que perguntar ao grupo que fez isto.
> **Aluno:** Fizemos por tentativas. (Aula_Sequências_nov 2013).

Ana, ao optar por selecionar um aluno distinto do que foi ao quadro expor a resolução, pretende levar os alunos a envolverem-se na apresentação de ideias. Durante a apresentação da estratégia de resolução da aluna, Ana vai acompanhando o seu raciocínio repetindo ideias importantes ("Porque já tinham a lei de formação", "É o termo geral outra vez"). Vai, também, desafiando os alunos a evoluírem nas suas ideias iniciais, levando-os a *comparar* raciocínios ("Já agora, vejam as outras resoluções. O que é que está aqui acontecer na resolução deste grupo? Ou do grupo da Eva?"). Para promover essa comparação, incita os alunos a pensarem sobre uma ideia específica, resolver a mesma questão sem recurso à escrita do termo geral – *filtragem* – com o intuito de introduzir a resolução do grupo seguinte. Ana não deixa a aluna terminar a exposição da sua estratégia de resolução, porque encontra no seu discurso uma ideia importante que considera ter merecimento de ser aprofundada e desconstruída, já que para resolver a questão não é obrigatório começar por escrever o termo geral da sequência apresentada. A sua opção por interromper a explicação da aluna e seguir uma nova ideia, favorece a clarificação dos raciocínios que estão a ser apresentados e a introdução da próxima estratégia na discussão coletiva. Para trás, Ana deixa a apresentação da verificação que a aluna sentiu necessidade de fazer, mas que parece uma ideia menos potente do que a explorada por Ana. Numa discussão é importante saber quando se deve parar para seguir uma ideia e Ana decidiu não deixar a aluna avançar com a sua apresentação para dar continuidade à afirmação acabada de fazer pela aluna.

No decorrer da apresentação de ideias, Ana procura que os alunos acompanhem os raciocínios que estão a ser apresentados, questionando-os sobre a compreensão das ideias comunicadas. Essa prática leva a que os alunos formulem questões ("Então e como é que eles descobriram que era logo o 25?"). Embora as perguntas lhe sejam dirigidas, a professora não responde e incentiva os alunos a colocarem as suas dúvidas aos colegas.

Na sequência da apresentação dessas ideias, Ana introduz mais um grupo na discussão com o objetivo de alertar para a necessidade do rigor da linguagem usada na apresentação dos seus raciocínios, desafiando também os alunos a justificarem as suas ideias, como evidencia o seguinte segmento:

> **Professora Ana:** Esta é a resolução aqui deste grupo da frente e eu fiquei muito confusa. (...) Então, 15 é igual a 46? 20 é igual a 61? E 25 é igual a 76? Não, eu sei. Deixa só dizer, é só para vos dizer que isto ficou assim escrito, não puseram mais nada. (...) Então os meninos deste grupo têm agora oportunidade para se defenderem.
> **Viviane:** A figura 15 era igual a 46 palitos, em 20 havia 61 e em 25 havia 76.
> **Professora Ana:** Deixa-a falar. Então na prática o grupo da Eva provavelmente fez isto até chegar a esta (impercetível) o que ela disse foi por tentativas, pronto. (...) Experimentaste com 15, estás a perceber? Mas foi isto que o vosso grupo me entregou (...) não estão a conseguir explicar nada do que estão a pensar, está bem? (impercetível) Com este aspeto claro que eu não quero, está bem? Pronto. (impercetível) No caso dela bastava ter dito a figura 15 tem não sei quantos palitos e se quisesse mostrar fazia esta conta. (Aula_Sequências_nov 2013).

A professora começa por justificar a pertinência da apresentação da estratégia, dando indicação da sua incorreção. Com essa ação, mostra aos alunos a importância de analisarem resoluções incorretas, de modo a esclarecer os erros e com o objetivo de não se repetir em situações futuras. Desta forma, Ana leva os alunos a pensarem sobre uma ideia específica (erro cometido) – *filtragem* – promovendo a *avaliação* dos raciocínios em jogo. A aluna é desafiada a justificar a sua estratégia de resolução, já que através dela a resolução apresentada pode ganhar algum valor em termos de raciocínio seguido, embora a forma de apresentação não seja matematicamente válida. Perante a dificuldade da aluna em se exprimir, Ana sente a necessidade de oferecer um raciocínio para a resolução exposta, de forma a clarificar perante a turma a incorreção da estratégia apresentada. Tem o cuidado de destacar que a forma de apresentação da resposta não é válida, realçando como o devem fazer no futuro. Ana, ao optar por introduzir este grupo na discussão, não tem como objetivo alertar, somente, para o rigor da escrita matemática mas também para uma estratégia de resolução válida, embora menos potente do ponto de vista do uso da linguagem algébrica.

Na tarefa *A família Rosa*, Ana opta por iniciar a apresentação de estratégias com a que surge de forma isolada na turma e menos forte, em termos de formalismo algébrico, já que recorre à estratégia de tentativa e erro, como fica evidente no seguinte diálogo:

> **Professora Ana:** Rui, então fala lá o que é que aconteceu?
> **Rui:** Então, fui outra vez por tentativas. (...) E experimentei primeiro com o 10 e não deu, tentei baixar mais um bocadinho, fui para o 8, voltou a não dar, fui para o 7 e já deu.
> **Professora Ana:** Então, e o 10? Por que é que começaste com o 10?
> **Rui:** Porque foi um número ao calhas. (...) Foi pura tentativa. (...)
> **Professora Ana:** Depois viste ali que tinhas que baixar, uma vez que te estava a dar mais do que a idade da senhora, baixaste e depois já estava quase. Foi mesmo assim? Não vale a pena dizer mais nada? (Aula_Equações_abr 2014).

Nesta tarefa, Ana, ao optar por este grupo para iniciar a apresentação das resoluções, pretende mostrar a validade de uma estratégia menos formal e que pode ser usada em situações futuras, principalmente, quando os alunos não conseguem avançar com procedimentos algébricos mais potentes, como é o caso das equações. Procura que o aluno justifique a opção pela primeira tentativa, com a intenção de verificar se tinham desenvolvido algum tipo de raciocínio que os tivesse conduzido aquele número. Contudo, a primeira tentativa consistiu apenas na experimentação arbitrária de um certo número, que neste caso é um número redondo.

Na tarefa *A cantina da escola*, Ana segue a mesma estrutura para a apresentação das estratégias de resolução – inicia com a estratégia menos frequente e que recorre à estratégia de tentativa e erro, mas envolvendo um raciocínio mais sistemático, como evidencia o seguinte diálogo:

> **Rui:** Na semana toda foram servidos 666 almoços e nós tirámos logo 156 que foi o da sexta, que deu 510. Depois dividimos 510 por 4.
> **Professora Ana:** Porquê? Explica lá. Há aqui pessoal que ainda não percebeu. Estão a perceber o raciocínio do Rui? (...)
> **Rui:** Começámos com 128 na segunda. (...)
> **Professora Ana:** O 128 já todos perceberam, e os outros números de onde vêm?
> **Rui:** Vêm do que está aqui. (...)

> **Professora Ana:** Então, as contas estão feitas de acordo a obedecerem ao texto. Sim, sim. Está bem. Vá. Depois viram então que não funcionava e… (Aula_Equações_abr 2014).

Ana procura que o aluno explique a sua estratégia de resolução, já que se distingue da anteriormente exposta, na medida em que não traduz uma escolha arbitrária de um número mas a escolha criteriosa do número a testar, de acordo com as condições do enunciado da tarefa. Dá continuidade à justificação do raciocínio do aluno, convidando-o a explicar de onde resultam os restantes números apresentados. Ana rediz o argumento do aluno, usando uma linguagem mais formal. Usa essa estratégia de ensino como uma forma de validar o raciocínio exposto e como meio para transmitir confiança ao aluno na continuação da sua exposição. O aluno corresponde à solicitação feita, como mostra o diálogo que se segue:

> **Tomás:** Eu fui ao total dos almoços, subtraí os almoços totais que era para ver quantos almoços sobravam.
> **Professora Ana:** Quanto é que tem a mais neste momento.
> **Tomás:** Depois dividi o resultado por 4 que era para saber o que tinha que subtrair. (...)
> **Guilherme:** Ó stora, 510 a dividir por 4 dá 127 e meio.
> **Tomás:** Sim, nós arredondámos para 128. (...) Para ser metade tinha que ser um número par. (...)
> **Rui:** Experimentámos outra, o 74.
> **Professora Ana:** E donde vem o 74?
> **Tomás:** Da subtração. Fizemos. Fomos ao 128. Primeiro dividimos 216 por 4 para saber quanto é que ia ficar pelos 4.
> **Professora Ana:** Para cada um deles. Quanto é que tinham que tirar a cada um.
> **Tomás:** Sim. Depois fomos ao 128 e subtraímos o resultado da divisão.
> **Professora Ana:** E essa conta não têm aí. (...) Exatamente, porque a sexta é fixa e já não temos que pensar na sexta, estão a ver? Portanto, na prática eles têm 216 almoços a mais do que deviam. Então supostamente, este 74 é o 128 menos o 54. Pronto, não é? Então agora tiraram isso a todos. (Aula_Equações_abr 2014).

Ana vai salientando os contributos mais importantes da apresentação do aluno, de forma a que a turma acompanhe o que está em discussão. Essa prática mostra-se eficaz, na medida em que os alunos evidenciam estar a acompanhar a apresentação da estratégia de resolução, colocando questões que favorecem a clarificação e *avaliação* do raciocínio exposto. O comentário feito por Guilherme permite que o raciocínio seja retomado, clarificado e a justificação aperfeiçoada, já que Tomás não tinha apresentado uma ideia importante (o número teria de ser par). Ana também colabora na avaliação das ideias que estão a ser discutidas, através do pedido de justificações, de forma a ampliar os raciocínios dos alunos.

Na apresentação de estratégias de resolução decorrentes do trabalho dos alunos com a tarefa *Inscrição no ginásio*, Ana opta por iniciar por uma estratégia frequente e que denota uma raciocínio claro e compreensível aos restantes alunos, como evidencia o extrato seguinte:

> **Professora Ana:** Já agora, alguém do grupo do Diego quer explicar como é que pensou para fazer o preenchimento da tabela? Augusto.
> **Íris:** Ali é. No *100 calorias* no primeiro mês foi a inscrição mais a mensalidade e no *Em forma* foi só a mensalidade, porque a inscrição é gratuita.
> **Professora Ana:** Hã, hã.
> **Íris:** Nos 3 meses foi acrescentar 80 euros aos 90, porque são as duas mensalidades e no *Em forma* foi acrescentar 2 mensalidades. Depois para descobrirmos que eram *4* meses tínhamos que ver de *170* para *210* quanto é que ia e ia uma mensalidade, então é porque era o mês a seguir.
> **Professora Ana:** Hã, hã.
> **Íris:** E fizemos o mesmo em baixo. E depois nos oito fomos acrescentando até chegar lá.
> **Professora Ana:** Até chegar lá. Foi sempre assim? Alguém dos outros grupos pensou de outra maneira diferente? (Aula Funções_mar 2014).

Ana volta a usar nesta tarefa a opção de selecionar para explicação um aluno diferente do que registou a resolução no quadro. Com essa prática, mostra aos alunos o que é trabalhar em grupo e que todos têm de estar preparados para responder sobre a estratégia pensada e executada. A primeira intervenção da aluna revela que foram capazes de interpretar e mobilizar a informação apresentada em linguagem natural no enunciado da tarefa. Nas intervenções seguintes, e fazendo uso da correta interpretação do enunciado, a aluna usa argumentos diferentes para explicar a resolução, já que na primeira explicação usa um raciocínio que parece pressupor o uso implícito de uma relação de proporcionalidade direta, enquanto na segunda explicação usa um raciocínio recursivo, que consiste na adição sucessiva da mensalidade ao mês anterior.

Neste segmento de discussão, as intervenções da professora são maioritariamente de concordância com os argumentos expostos, o que traduz o seu grau de satisfação perante a clareza e correção da explicação da aluna. A outra intervenção da professora consiste em desafiar os alunos a comparar a sua resolução com a apresentada e a introduzir na discussão contributos novos – *comparação*. Os alunos correspondem à provocação lançada, apresentando outras formas de preencher a tabela como se observa no seguinte diálogo:

Tomás: Nós até aos 4 meses fizemos tal e qual como a Íris disse, nos *100 calorias* aos 8 meses também. No *Em forma* dos 4 meses para os 8, como a mensalidade era gratuita fizemos vezes 2. (...)
Professora Ana: O Tomás está aqui a dizer que para passar dos 4 meses para os 8 pode duplicar no ginásio *Em forma* mas não pode fazer o dobro no *100 calorias*, mas tenho ideia que o grupo ali da frente duplicou.
Vicente: Duplicámos. (...) Mas depois subtraímos os 50.
Professora Ana: Será que pensou bem? Vejam lá. Ele pode chegar aos *4*. Tomás pensa lá. Ele diz que pode chegar aos *4* duplicar e tirar os *50*.
Tomás: Pode. (Aula_Funções_mar 2014).

Com a introdução deste grupo na discussão, Ana pretende mostrar um tipo de raciocínio que poderia ter sido desenvolvido para o preenchimento da tabela, no caso do ginásio *Em forma*, que consiste na ideia de dobro e também para frisar que esse raciocínio não poderia ser aplicado no caso do outro ginásio, a menos que fizessem uma boa interpretação do que está em jogo nesse ginásio. Essa opção permite-lhe ainda comentar que esse raciocínio tinha sido feito por um dos grupos e clarificar a sua estratégia, destacando em que condições também poderiam usar a ideia de dobro mesmo no ginásio que aparentemente não o permitia – *avaliação*.

Ana começa por solicitar um grupo para apresentar a sua estratégia de resolução – *solicitação e discussão de muitas ideias* – para, de seguida, focar a atenção dos alunos numa certa passagem dessa estratégia – *filtragem* – que conduz à análise desse raciocínio e condições em que pode ser aplicado – *solicitação e discussão de muitas ideias*. Durante a condução do discurso, Ana tem preocupações diferentes com os contributos que estão em análise, já que, no início, pretende, apenas, introduzir um grupo na discussão – *conteúdo matemático não filtrado* – e, em consequência do que é apresentado, lança um argumento para discussão – *conteúdo matemático filtrado*.

Ana, também, promove a *comparação* de estratégias, a partir da interpretação da informação apresentada em linguagem natural, na tarefa *A cantina da escola*, como mostra o seguinte diálogo:

Professora Ana: Se calhar ia-vos só apresentar a primeira parte, depois a resolução é idêntica à deste grupo. (...) Só para vocês verem que pode ter outra leitura do problema (...) não vamos resolver a equação. Fazes a primeira parte e apresentas a leitura da tua equação, se calhar. (...)
Íris: Nós, ao contrário daquele grupo, nós pensámos em vez de pôr a segunda como o x, nós pusemos a terça. Porque nós primeiro vimos que na quarta-feira íamos precisar dos da terça e como (impercetível) decidimos fazer a terça. Então ficou: x menos 100, porque a terça-feira vai ter mais 100, logo a segunda tem menos 100 do que a terça; mais x.

> **Professora Ana:** Ela já está a escrever a equação. Não queres organizar como eles? Para quem está a ver era mais fácil. Faz segunda, terça, quarta, quinta e sexta. Desculpa lá Íris, mas eu acho que ajuda a quem está a ver, porque eles todos pensaram de outra maneira e está-lhes a fazer muita confusão ver outras coisas. (Aula_Equações_abr 2014).

Ana começa por informar os alunos da pertinência da introdução de mais uma estratégia na discussão, destacando que resulta das diversas interpretações que podem fazer da mesma informação em linguagem natural. Com essa prática, Ana leva os alunos a relacionarem as diversas estratégias apresentadas – *comparação*. Apesar da aluna apresentar o seu raciocínio de forma clara, justificando corretamente o raciocínio seguido, Ana opta por desafiar a aluna a organizar a informação da sua equação com as condições do enunciado, deixando claro, para quem está a acompanhar, a que dia da semana está associado cada monómio ou polinómio da sua equação, sugerindo uma representação semelhante à do grupo que apresentou anteriormente.

Durante a explanação da aluna, a turma avalia os raciocínios em jogo, colocando questões que ajudam a clarificá-los – *avaliação* – como evidencia o seguinte extrato:

> **Maria:** Eu não percebo por que é que na segunda é x menos 100. (...)
> **Íris:** Isto é uma questão de tu leres: tanto pode ter a terça-feira mais 100 almoços que a segunda, do que a segunda ter menos 100 almoços do que a terça. Não é? É a mesma coisa. (...) Olha vou-te só explicar isto: tanto isto tem mais 100 do que isto, como isto tem menos 100 do que isto.
> **Professora Ana:** Sim? Está? Portanto, ela aqui tirou. Se esta aqui é a base dela, aquele tem que ter menos 100. Está bem? Agora fez tudo a partir deste. Metade da terça, o dobro da segunda e o 156. Pronto e agora constrói a equação e depois resolve uma equação idêntica à outra, está bem? É parecido. (Aula_Equações_abr 2014).

Ana deixa a aluna esclarecer a dúvida à colega, mas sente necessidade de fazer, posteriormente, uma breve síntese do que está em jogo naquela estratégia de resolução. Retoma a sua dúvida e oferece outra explicação, apoiada na representação da incógnita e nas condições do enunciado. Ana congratula-se com a participação dos alunos na discussão através do questionamento, porque, na sua opinião, quem se envolve numa discussão é porque "Querem perceber, ou querem perceber melhor (...) porque à partida ou está a perceber uma diferente ou pareceu-me que não percebi. (...) Mas explica-me isto melhor" (EF_jun 2014).

A interpretação oferecida por Ana para a equação escrita no quadro, desencadeia uma nova *avaliação* pelos alunos, como mostra o seguinte diálogo:

> **Guilherme:** Idêntica, mas diferente.
> **Professora Ana:** Hã? Idêntica, mas diferente. Reparem, o que é que está diferente? Tem um denominador e tem parêntesis, que a outra não tinha. (...) Então o que é que tu achas, de acordo com o resultado que ali está, o que é que vai ter que dar o nosso x?
> **Guilherme:** 180. (...)
> **Professora Ana:** Foi isso que aconteceu. Muito bem. (...) E depois de tudo feito (...) vai dar x igual a 180.
> **Íris:** Porque o nosso x é terça-feira.
> **Professora Ana:** Ora repara, se aqui é 180, este grupo agora para chegar a segunda-feira o que teve que fazer?
> **Íris:** 180 menos 100.
> **Professora Ana:** Tirar 100. Conclusão, dá os 80 dali. Está bem? Depois fica tudo igual. Está? Pessoal perceberam? (Aula_Equações_abr 2014).

Ana dá continuidade à intervenção do aluno levando-o a antecipar o conjunto solução da equação escrita, depois de o aluno já ter concluído que o conjunto solução desta equação teria de ser diferente de outra equação já analisada, mas a resposta ao problema seria a mesma. De seguida, Ana frisa que o conjunto solução da equação é o esperado, confirmado pela resolução da equação. Ana desafia, ainda, a aluna que está a expor a sua resolução a explicar como obtém o número de almoços dos outros dias da semana, a partir do conjunto solução da sua equação, estando, assim, a incentivar a explicar como obteve a resposta ao problema. Esta opção justifica-se pelas reflexões que Ana desenvolveu no grupo de formação, em particular, na análise de um episódio de sala de aula envolvendo a discussão coletiva de um problema do mesmo género:

> Mas na prática o que está do lado esquerdo chega para dizer a solução do problema? Dá ideia que não. Quando chega ao x diferente do x da resolução anterior dá ideia que param ali e não chegam a dizer então afinal quantos votos teve cada um, não é? Dá ideia que não. (...) Porque na prática não se chega ali, então o problema deu a mesma coisa, não, é só que o x é que é diferente. (...) Mas aquilo que eles querem saber parece que para ali no x. (1.ª SC_1 out 2013).

A *comparação* que Ana incentiva permite levar os alunos a concluírem que o mesmo problema pode originar a escrita de diferentes equações, cada uma com a sua solução, mas que conduzem à mesma resposta ao problema.

A forma como Ana conduz o discurso da aula denota que, numa primeira fase, a sua intenção passa por levar os alunos a compararem diferentes estratégias para a resolução de um mesmo problema, resultado da interpretação que fazem da informação apresentada em linguagem natural – *conteúdo matemático não filtrado* – que conduz à análise de duas equações diferentes para o mesmo problema e, consequentemente, para a conclusão de que o mesmo problema pode ser traduzido por equações distintas, com conjuntos solução também diferentes mas que originam a mesma resposta ao problema – *conteúdo matemático filtrado*.

Ana, através da *comparação* de estratégias, alerta os alunos para a importância de apresentarem sempre a resposta a um problema, como mostra o diálogo ocorrido durante a discussão da tarefa *A família Rosa*:

> **Paulo:** Então é assim: portanto, primeiro pus ali em cima as idades de cada um. O da Sara representei por F, porque era o único que não havia qualquer indicação e depois pus que o da Maria, era o da Sara mais o 5 e por aí adiante. Depois pus ali as quatro expressões juntas que davam 47. Depois ali praticamente na segunda passagem fiz só a do João, que foi fazer a dos parêntesis.
> **Professora Ana:** Ai estás a explicar o desenvolvimento da equação. (...)
> **Paulo:** Diz aqui que a Maria tem 5 anos de diferença da irmã mais nova, se é a irmã mais nova, se tem 5 anos de diferença é porque é mais velha, portanto tem mais 5. Depois juntei.
> **Professora Ana:** Pronto, está a explicar a resolução da equação, não é? Pronto, e então quando chegaste ao fim obtiveste.
> **Paulo:** 2.
> **Professora Ana:** 2, mas não resolveste o nosso problema. Pois não?
> **Paulo:** Não, saltei a última parte. (...)
> **Professora Ana:** O Augusto teve o cuidado de pôr ali. Vocês tiveram o cuidado de pôr isso no vosso papel? (Aula_Equações_abr 2014).

Ana apoia-se na apresentação desta estratégia para a comparar com a anterior e, fundamentalmente, para reforçar a importância de darem resposta ao problema. Frisa que a resolução do problema não termina com a resolução da equação, erro muitas vezes cometido pelos alunos. O discurso segue, assim, um processo de estreitamento, já que inicia com o convite à partilha das estratégias de resolução – *solicitação e discussão de muitas ideias* – para, de seguida, se focar no conjunto solução da equação e respetiva associação à resposta ao problema – *filtragem*.

Ana, também, promove a *comparação* de ideias a partir da indicação do aparecimento de duas expressões diferentes para o termo geral da sequência, presente na tarefa *Cubos com autocolantes*, que importa analisar e explicar, como evidencia o excerto seguinte:

> **Professora Ana:** Eu queria aqui falar em dois casos, porque há aqui dois casos que têm regras diferentes. (...) Na segunda questão qual é a regra que a maior parte de vocês faz?
> **Vários:** $4n$ mais 2. (...)

Professora Ana: A Mara disse assim: com 10 cubos. Ela explica assim: com 10 cubos fez assim, 4 vezes 10 menos 1, 2 mais 10. (...) Quem pensou nesta, como é que pensou? Quem quer explicar?
Mara: Então. Na figura com 10 cubos os 2 do canto têm sempre 5 autocolantes e os 10 menos 2 dá 8. Como os cubos do meio têm 4 autocolantes faço 4 vezes 8 igual a 32 mais 10, 42. (...)
Professora Ana: Agora é a Vera. Quero ouvir.
Vera: Como é sempre de 4 em 4, acrescentam-se sempre 4 autocolantes, depois, por exemplo, o número, no segundo caso 4 vezes 2, 4 vezes que é o segundo termo.
Professora Ana: Sim.
Vera: Dá 8. Para chegar a 10, mais 2. (Aula_Sequências_nov 2013).

Ana recorre à comparação de duas estratégias diferentes para despertar o interesse dos alunos para a sua análise e, principalmente, porque a que surge de forma menos frequente na turma revela um raciocínio potente e que merece ser discutido, já que envolve a análise do padrão que configura a imagem e não a simples identificação do padrão repetitivo da sequência numérica subjacente à sequência pictórica apresentada. A solicitação de explicação para a estratégia menos frequente leva a que os alunos que não tenham pensado nela tentem desviar a discussão para a estratégia mais frequente. Contudo, como a intenção de Ana é levar os alunos a interpretarem a estratégia apresentada pelo grupo – *avaliação* – volta a focar a sua atenção nessa explicação, desafiando a turma a oferecer uma explicação, como evidencia o diálogo seguinte:

Professora Ana: A maior parte de vocês pensou assim. O grupo do Mara e do André pensou de outra maneira. Agora, quem é que consegue explicar como é que eles pensaram? Eles estão a falar para a figura 10, portanto imaginem que vocês têm 10 cubos unidos. Por que é que eles multiplicam 4 por 10 menos 2? Que é 8. (...)
Aluno: Na figura 10, eram 10 cubos ao todo.
Professora Ana: Eram 10 cubos ao todo. Mas.
Aluno: Mas como os 8.
Professora Ana: Estes 2 do canto tu puseste à parte.
Aluno: Tinham 5 autocolantes.
Professora Ana: Tinham 5 autocolantes cada.
Aluno: Se nós fizermos 4 vezes 8.
Professora Ana: Porque estes trabalhavam todos a 4, não é?
Aluno: E depois somámos 5 mais 5 que dá 10. (Aula_Sequências_nov 2013).

Ana, ao retomar a interpretação da expressão que surgiu na turma de forma isolada, decide focar a atenção dos alunos numa parte da expressão escrita (“Por que é que eles multiplicam 4 por 10 menos 2?"). Com essa ação, pretende ajudar os alunos a avançarem com alguma explicação, dando-lhes indicação de uma particularidade que devem procurar interpretar. Deseja, também, que os alunos se mantenham envolvidos, porque, como Ana refere, durante as aulas os alunos tendem a dispersar-se quando se analisam outras resoluções distintas das suas: "Vocês quando, há sempre uma coisa: quando não é a vossa resolução estão muito pouco recetivos para perceberem a dos outros, certo? É, não é? A vossa é sempre a melhor, pois é" (Aula_Funções_mar 2014). Durante a explicação do aluno, Ana acompanha o seu raciocínio, através da repetição de contributos importantes ou através da indicação do bom caminho que está a seguir e que deve continuar ("Eram 10 cubos ao todo. Mas"). Ana acrescenta, também, pequenos contributos que servem somente para clarificar junto da turma o argumento apresentado pelo aluno ("Porque estes trabalhavam todos a 4, não é?").

Ana, também, usa a *comparação* de ideias, na tarefa *Inscrição no ginásio*, para alertar os alunos para a importância de apresentar a informação matemática com rigor:

> **Professora Ana:** Foi tudo muito parecido. (...) Vai um elemento deste grupo, se faz favor, e outro deste grupo. Fazem ali para ver se alguém nota alguma diferença. (...) Algum grupo tem outra diferente que queira partilhar? Dinis vai lá partilhar. (...) Olhem, na prática vocês escreveram uma expressão analítica. (...) E por que é que o Dinis não pôs nenhuma variável? Não lhe apeteceu? (...) Quando eu olho para uma expressão assim, eu tenho que saber o que o x está a valer, o que é que o x representa, ou o n. O Dinis é o único que não tem que explicar o que se está a passar, escreveu lá precisamente o que vai acontecer. Mas os outros faria todo o sentido dizerem o que é que o x está a representar.
> **Íris:** Ó professora mas neste exercício poderia fazer mais sentido ser o x, porque como aqui no gráfico, não sei se toda a gente fez assim mas no eixo das abcissas.
> **Professora Ana:** Então e neste momento será que não fazia sentido, em vez de termos só uma expressão, também não devia ter ali outra coisa? Um sinal de igual e mais qualquer coisa? Não sentem falta disso? (...) Não? É que tu disseste assim: o x está naquele eixo e quem está no outro eixo? E quem é o outro eixo? É o eixo dos yy. Não é? (...) Se eu escrevesse isto eu colocava assim [acrescenta atrás da expressão $y =$]. Ou se escrevesse esta com x colocávamos assim [escreve no quadro $y = 45x$], vejam lá. Não? (...) Esta aqui [aponta para $y = 45x$]. Faz lembrar o quê? (Aula_Funções_mar 2014).

Através da comparação das expressões escritas, Ana alerta os alunos para o aspeto distintivo, que neste caso se prende com a letra escolhida para representar a incógnita e com a necessidade da identificação da mesma, de modo a traduzir claramente a informação relativa à tarefa em resolução. Destaca, ainda, o facto do aluno que traduziu a relação entre as variáveis em jogo por linguagem corrente não ter que o fazer, já que essa informação já surge de forma explícita na sua resposta. A forma como conduz o discurso da aula leva a que uma aluna relacione a escolha da letra para designar a incógnita com a representação gráfica elaborada numa questão anterior. Ana aproveita a sugestão da aluna e usa o mesmo argumento para justificar a necessidade de introduzirem outra variável na expressão escrita, de modo a que a expressão traduza uma relação entre duas variáveis. Ana tem o cuidado de registar essas relações no quadro, para que fiquem claras para todos os alunos.

Ana conclui a discussão da tarefa – *conclusão* – levando os alunos a relacionar a expressão escrita com o nome de cada função representada por essa mesma expressão:

> **Professora Ana:** Função. Mais? Que tipo de função?
> **Alunos:** Linear.
> **Professora Ana:** Linear. E a constante afinal, está ali a rir-se para nós? Está? Qual é a constante? Não se ouve nada.
> **Íris:** 45. (...)
> **Professora Ana:** Então e aquela daquele lado? Também é linear?
> **Vários:** Não.
> **Íris:** Tem ali o mais 50.
> **Professora Ana:** Então e como se chamavam aquelas?
> **Vários:** Afim. (Aula_Funções_mar 2014).

No seguimento da comparação efetuada entre as expressões escritas, Ana dá continuidade ao discurso levando, agora, os alunos a relacionar a expressão escrita com o tipo de função que lhe corresponde e a atribuir significado aos parâmetros envolvidos – *conclusão*.

Os segmentos de discussão anteriores demostram que Ana começa por levar os alunos a apresentarem e compararem as expressões analíticas escritas – *solicitação e discussão de muitas ideias* – para seguidamente focar a sua atenção no rigor da escrita dessas expressões, de modo a traduzirem uma relação entre duas variáveis – *filtragem* – o que conduz os alunos a relacionarem a letra escolhida para representar a incógnita com a representação gráfica, a associarem cada expressão com o tipo de função em causa e a atribuírem significado aos parâmetros envolvidos – *solicitação e discussão de mais ideias*. O encaminhamento que Ana dá às ideias dos alunos revela que a sua preocupação inicial está na partilha da expressão que traduz o valor a pagar em cada ginásio em função do tempo de permanência – *conteúdo matemático não filtrado* – e só, posteriormente, foca a atenção dos alunos no rigor da escrita da relação que envolve as duas variáveis e respetiva associação ao tipo de função que representam – *conteúdo matemático filtrado*.

Ana usa a *conclusão* da discussão da tarefa *Cubos com autocolantes* para levar os alunos a generalizarem uma relação encontrada, como mostra o excerto seguinte:

> **Professora Ana:** Vamos tentar generalizar esta fórmula. E se eu quisesse para o caso geral? Como é que eu fazia? Digam lá. Se tivéssemos a figura número n.
> **Aluno:** Era 4 vezes n menos 2.
> **Professora Ana:** n menos 2. Muito bem, por que tiras 2? (impercetível) Ele está a pensar bem, vejam lá se concordam.
> (um aluno faz uma pergunta mas é impercetível)
> **Professora Ana:** Então se eu tiro 2 da ponta, quantos ficam por dentro? Ficam menos 2. E na figura 10? Então não é? Tenho 10 cubinhos seguidos. Ele tira os 2 da ponta, tira este e tira aquele e fica com 8 cubos aqui no meio. Então o que é que ele faz? Tem 4 autocolantes para 8 cubos mais 5 deste e 5 deste que dá 10. (...) É outra técnica. A maior parte dos alunos foi pela outra. (Aula_Sequências_nov 2013).

O desafio lançado por Ana é aceite pelos alunos e a generalização que antecipou começa a surgir. Contudo, Ana não se deixa ficar apenas pela generalização mas incentiva os alunos a explicar essa generalização, ao mesmo tempo que solicita a sua participação para avaliarem o raciocínio exposto – *avaliação*. A partir da intervenção (impercetível) do aluno, Ana sente necessidade de concretizar a generalização feita com o caso particular de 10 cubos, para ser mais facilmente compreensível, já que tinha sido analisado anteriormente. Embora a generalização não tenha sido formalizada numa expressão algébrica, Ana dá por concluída a discussão com a generalização do número de cubos que ficam no meio da construção, em virtude do término da aula.

Ana promove a *conclusão* da discussão, em torno de tarefas relacionadas com o tópico Equações, através da indicação de que a mesma informação em linguagem natural pode ser traduzida de diversas formas em linguagem matemática:

> **Professora Ana:** Olhem, ó pessoal reparem que mais uma vez, tal como aconteceu na outra de há bocado, olhem todos resolveram o mesmo problema mas as equações eram ligeiramente diferentes outra vez. E era normal, outra vez, Gonçalo estas darem coisas diferentes? (...)
> **Vanda:** Sim.
> **Professora Ana:** Porquê?
> **Vanda:** São pessoas diferentes.
> **Professora Ana:** Pessoas diferentes, então não é? Então aqui o Paulo anda à procura da idade de quem?
> **Aluno:** Da Sara.

Professora Ana: Da Sara. E ali o Augusto andava à procura da idade da Maria. Portanto ainda bem que não deram iguais se não elas eram gémeas afinal. E não era isso que dizia no problema, está bem? Pronto, conclusão: aqui agora ainda é preciso se fazer o que se fez ali, está bem? (Aula_Equações_abril 2014).

Ana alerta os alunos para a possibilidade de escreverem equações diferentes mesmo quando todos resolvem o mesmo problema, ou seja, interpretam a mesma informação dada em linguagem natural. Em consequência, interroga os alunos sobre a relação de cada equação com o respetivo conjunto solução. Esse questionamento favorece a justificação dessa ocorrência. Ana não conclui sem antes frisar a importância de os alunos apresentarem sempre a resposta ao problema em estudo.

Em síntese, Ana conduz a discussão ao longo de três momentos principais: *i)* apresentação; *ii)* comparação, avaliação e filtragem; e *iii)* conclusão (Figura 12).

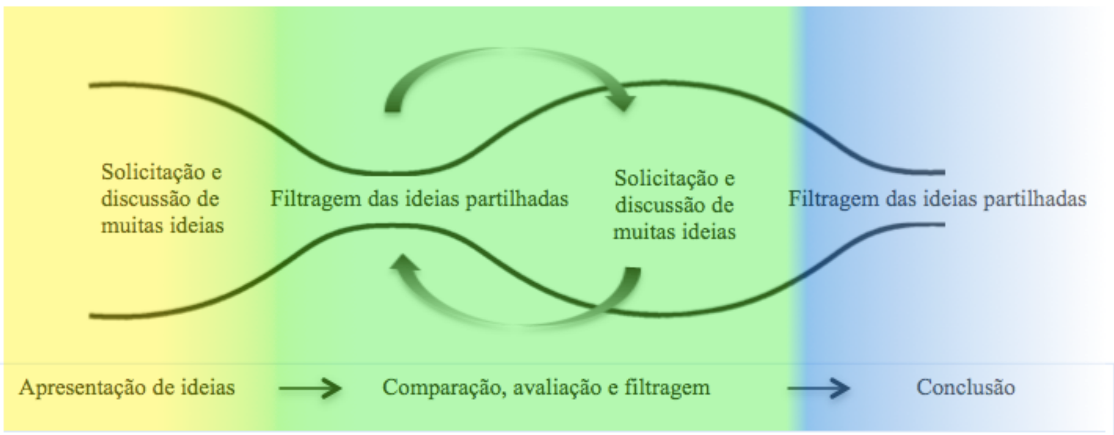


Figura 12: Organização da discussão coletiva da professora Ana.

Inicia a apresentação das estratégias de resolução com alunos escolhidos especificamente para o efeito, mas recorrendo a práticas diferentes. Na tarefa *Palitos*, inicia pela estratégia mais frequente, já nas tarefas relacionadas com as Equações começa pelas que surgem de forma isolada na turma e envolvem representações menos formais. Neste último caso, as estratégias selecionadas para iniciar mostram um uso diferente da estratégia de tentativa e erro, já que na tarefa *A família Rosa*, os alunos iniciam por um número redondo e na tarefa *A cantina da escola*, escolhem um número criterioso, de acordo com as condições do enunciado. Ana costuma dar indicação à turma do número de estratégias diferentes que emergem nas suas resoluções, assim como do número de grupos que resolveram pela mesma estratégia. Dá, também, indicação do que pretende que seja apresentado. Quando há vários grupos a recorrer à mesma estratégia, costuma escolher um aluno diferente do que vai exibir a sua resolução para apresentar o raciocínio seguido. É característica da prática da professora Ana interromper as explicações dos alunos para seguir uma ideia que reconhece ter potencial, como aconteceu na tarefa *Palitos*, onde Ana não deixa a aluna concluir a sua intervenção para desconstruir a noção da necessidade da escrita do termo geral de uma sequência para saber se um certo termo pertence à sequência.

Promove a comparação através da confrontação de estratégias, da interpretação de informação apresentada em linguagem natural, da indicação da resposta a um problema, da análise de expressões distintas para o termo geral de uma certa sequência e da apresentação de informação matemática com rigor. Filtra os contributos mais importantes, de forma a serem analisados pela turma, em particular, analisa erros cometidos nas resoluções desenvolvidas. Quando filtra contributos, tem como objetivo manter os alunos envolvidos na discussão, porque a sua experiência diz-lhe que nesses momentos eles tendem a dispersar-se. Leva os alunos a avaliar as ideias em jogo através do questionamento, da solicitação de explicações e justificações para os raciocínios expostos, da introdução de contributos que precisam ser clarificados, do oferecimento de interpretações para certos raciocínios, da repetição de argumentos, do redizer usando linguagem correta e da manifestação de concordância. A formulação de questões não parte somente de Ana mas também da turma, já que incentiva os alunos a interpelarem os colegas em vez da professora.

Usa a conclusão da discussão para levar os alunos a relacionar as expressões algébricas das funções linear e afim com os respetivos nomes das funções, a generalizar e explicar relações encontradas e a salientar que a mesma informação apresentada em linguagem natural pode dar origem à escrita de diferentes equações.

O discurso gerado durante a condução da discussão segue um processo de estreitamento de ideias seguido de ampliação, já que tem início com a solicitação de muita ideias, com o convite à apresentação das estratégias de resolução, seguido da filtragem dos contributos mais importantes que serão analisados em detalhe e que desencadeiam uma nova solicitação e discussão de muitas ideias. Durante esse processo, Ana tem objetivos distintos para as ideias que estão a ser apresentadas, na medida em que numa fase inicial como pretende dar início à discussão com o convite à apresentação das resoluções não se preocupa tanto com o objetivo que pretende alcançar, mas, posteriormente, começa a direcionar a atenção dos alunos para a análise de certos raciocínios, com vista a alcançar o propósito da discussão.

Ana apoia-se no seu *conhecimento da prática letiva* em articulação com o seu *conhecimento da Matemática e da aprendizagem e dos alunos* para selecionar os alunos que pretende que deem início à discussão, para filtrar os contributos que merecem ser analisados em pormenor e para envolver os alunos na sistematização e relacionamento das ideias mais importantes.

Ações de ensino

De uma forma geral, Ana recorre a práticas distintas para iniciar a discussão coletiva. Por exemplo, na tarefa *Cubos com autocolantes*, Ana começa por informar a turma do seu desempenho – *ações de informar* – como mostra o seguinte excerto:

> À exceção de dois grupos que não se portaram nada bem (...) eu queria mostrar aqui duas coisas diferentes. (...) Depois na segunda é que era: consegues descobrir a regra? (...) A maior parte de vocês (...) fizeram mais ou menos bem. Só que eu queria aqui falar em dois casos, porque há aqui dois casos que têm regras diferentes. (Aula_Sequências_nov 2013).

Ana começa por fazer uma breve referência ao trabalho dos alunos na resolução da tarefa e, de seguida, informa a turma de que vai mostrar duas resoluções que são distintas e menciona a caraterística que as distingue. Com essa opção, Ana pretende despertar o interesse dos alunos para analisarem duas estratégias diferentes e procurarem pontos comuns e divergentes entre as resoluções. Ana opta por não convidar os alunos a apresentarem a resolução da primeira questão, porque estava condicionada pelo tempo e porque os alunos a tinham resolvido sem dificuldade. Decide, assim, focar a apresentação e discussão de ideias na segunda questão, relativa à escrita de uma expressão para o termo geral da sequência dada.

Na tarefa *A família Rosa*, Ana inicia a discussão informando a turma do número de resoluções distintas que surgiram e do tipo de estratégia envolvida – *ações de informar* – como mostra o seguinte segmento:

> Temos três resoluções outra vez. Pois temos. Temos aqui outra vez por tentativas, temos a equação dele que é igual à deles e vai um daqui. (...) Pode vir o Augusto fazer a dele, vem um menino ali do fundo fazer a outra e já não temos mais nenhuma. (...) Eu queria agora a turma toda caladinha e toda viradinha para o quadro, se faz favor, porque temos três resoluções para observar e temos três meninos que vão falar. (Aula_Equações_abr 2014).

Para além de alertar os alunos para os tipos de estratégias que surgiram na turma, Ana menciona os grupos que resolveram a tarefa recorrendo ao mesmo tipo de estratégia e dá indicação do aluno que pretende que venha ao quadro apresentar a sua resolução – *ações de elicitar*. Ana também convida os alunos a prestarem atenção às resoluções que vão ser apresentadas, com o intuito de os levar a estabelecer conexões entre a sua estratégia e a que está a ser exibida.

Ainda na mesma tarefa, Ana, também, opta por convidar alunos específicos a expor a sua resolução, porque identifica alguma particularidade nas resoluções, embora recorrendo à mesma estratégia – *ações de elicitar* – como fica evidente no seguinte segmento:

> Finalmente a última questão: escrever a expressão analítica. Também, acho que não tivemos assim tantas. (...) Foi tudo muito parecido. (...) Vai um elemento deste grupo, se faz favor, e outro deste grupo. Fazem ali para ver se alguém nota alguma diferença. (Aula_Funções_mar 2014).

Na sua fala, Ana deixa implícito que as resoluções que serão apresentadas são distintas sem nunca mencionar o aspeto que as distingue. Informa, assim, a turma do número de resoluções diferentes que surgiram, ao dar indicação dos alunos que pretende que exibam a sua forma de resolver a questão colocada – *ações de informar*. Acompanha a sua intervenção do convite aos alunos para analisarem as duas estratégias, de modo a compararem e estabelecerem relações – *ações de desafiar*.

Também na tarefa *A cantina da escola*, Ana opta por informar os alunos do número de grupos que desenvolveram o mesmo tipo de resolução da que está a ser apresentada, com o propósito de despertar o interesse dos alunos a acompanhar a exposição e a juntar contributos: "Eu acho que há mais dois grupos que estão a reconhecer aqueles dados, mais ou menos" (Aula_Equações_abr 2014) – *ações de informar*. Neste caso, Ana usa a metodologia de não mencionar os grupos que desenvolveram o mesmo tipo de resolução, possivelmente, para despertar a curiosidade dos alunos a compararem a resolução apresentada com a sua.

No caso da tarefa *Inscrição no ginásio*, potencialmente pela natureza da tarefa proposta aos alunos (exploração), Ana não recorre às mesmas práticas – informar, inicialmente, os alunos do seu desempenho ou do número de resoluções distintas e convidar um aluno específico para apresentar a sua estratégia de resolução. Contudo, ao promover a discussão de uma questão em particular, informa a turma da estratégia de resolução seguida*,* como evidencia o seguinte excerto:

> No 3 o que me é dado a ver é que vocês usaram quase todos o mesmo processo, julgo eu. É, não é? Fazem quase todos uma tabelita, não é por aí que vamos desempatar. Então um grupo que queira ir. Rafael. (Aula_Funções_mar 2014).

Ana lança o convite para apresentação da sua resolução à turma e não a um aluno específico – *ações de elicitar* – provavelmente, por todos os alunos terem recorrido à mesma estratégia.

Na tarefa *A família Rosa*, Ana depois de convidar o aluno a apresentar a sua resolução – *ações de elicitar* – incentiva a turma a acompanhar a explicação do aluno, como evidencia o diálogo que se segue:

> **Professora Ana:** O Augusto fala da sua resolução, se faz favor. (...)
> **Augusto:** Eu escrevi uma expressão numérica.
> **Professora Ana:** Uma equação.
> **Augusto:** Sim, uma equação. Com os anos da Maria. Depois vi com os anos da Maria que a equação deu 7. (...)
> **Professora Ana:** Então, conclusão: esta é a Maria e então escreveu tudo em função da Maria. Então quem é esta?
> **Augusto:** A Sara.
> **Professora Ana:** É a Sara, porque é 5 anos mais nova. Agora parto onde?
> **Augusto:** É aí, $3M$, que é o João.
> **Professora Ana:** Porque tem o triplo da Maria, diz o texto.
> **Augusto:** O M mais 10 é.
> **Professora Ana:** Pronto, estão aqui os quatro irmãos. (...) Chegou ao fim e organizou. (Aula_Equações_abr 2014).

Ana acompanha de modo muito próximo a explicação do aluno recorrendo às *ações de apoiar* para o ajudar a organizar o seu raciocínio, de forma a transmiti-lo claramente aos colegas, já que estava com dificuldades em apresentar a sua estratégia de resolução, dando somente indicação do tipo de estratégia seguida e do conjunto solução da equação. Assim, apoiada neste tipo de ações, Ana usa o redizer para apresentar a informação verbalizada pelo aluno mas fazendo-o com a terminologia correta. Recorre, também, ao questionamento como forma de orientar o aluno para as ideias importantes a apresentar, nomeadamente, a explicação dos monómios envolvidos na sua equação e respetiva associação às condições do enunciado da tarefa. Essa opção é justificada pela forma como Ana encara o envolvimento dos alunos na discussão: “Se calhar para ajudá-los a pensar e a melhorar, se calhar, para os conduzir naquilo que nós pretendemos ensinar" (EI_set 2013). Usa, também, as *ações de apoiar* para completar os contributos do aluno através do oferecimento de interpretações para o seu argumento.

Ana apoia-se, também, nas *ações de desafiar*, na tarefa *A cantina da escola*, para levar os alunos a justificar raciocínios e a relacionar os monómios envolvidos numa equação com as respetivas condições que figuram numa informação apresentada em linguagem natural, como mostra o diálogo que se segue:

> **Professora Ana:** O que é que escreveste aí? Porquê? Vais explicar a primeira parte.
> **Renato:** Na segunda feira, ui. Na terça diz que serviu mais 100 almoços do que na segunda. Então na segunda como não sabíamos, pus x. Depois na terça-feira fiz x mais 100 que é os almoços servidos. Depois, na quarta-feira diz que é metade dos almoços servidos, temos que meter entre parêntesis para fazer primeiro o que está lá dentro. Na quinta-feira diz que é o dobro dos almoços da segunda e na sexta os 156 almoços. (...)
> **Professora Ana:** E agora? Tendo a semana organizada, o que é que vais fazer?
> **Renato:** Uma equação.
> **Professora Ana:** Esta é igual à vossa, não é? E acho que é igual à deles ali também. (...) Estamos a somar os dias da semana todos e sabemos que tem que dar os 666 almoços. Pronto e agora estamos na presença de uma equaçãozinha do género das que temos dado nos últimos dias e toca a andar. Olha, deixa só dizer ali uma coisa: vocês repararam que o Renato já fez ali umas alterações da expressão que ele tinha ali ao lado para a expressão que passou para a equação? (...) Viram que o Renato mudou o que escreveu na quarta-feira e já pôs ali com um traço de fração? E é aquilo que vocês estão mais habituados a utilizar, porque se pusessem a dividir por 2, podem, teriam mais algumas dificuldades ali na resolução e também já transformou o x vezes 2 em $2x$, está bem? (...) Chegámos ao fim da equação, mas quando chegamos ao fim da equação ainda não estamos no fim do problema. Portanto, o que é que agora. Podes pôr aí. (Aula_Equações_abr 2014).

Ana acompanha a explicação apresentada pelo aluno e perante a sua razoabilidade, recorre às *ações de informar* para dar indicação ao aluno da sua concordância e lhe transmitir confiança para progredir com a sua exposição. No entanto, lança uma questão que pretende orientar o aluno para apresentação de uma nova informação relacionada com o conteúdo matemático em estudo e que se traduz na indicação da estratégia seguida – *ações de apoiar*. De seguida, Ana recorre às *ações de informar* para alertar a turma para os grupos que usaram a mesma estratégia de resolução e para oferecer interpretações para o raciocínio exposto, onde foca a sua atenção em aspetos importantes em termos do uso de linguagem algébrica e com reflexos na resolução de equações, destacando as alterações que o aluno efetuou em alguns monómios, como a passagem de $x \div 2$ a $\frac{x}{2}$ e de $2 \times x$ a $2x$. Salienta, ainda, que esse tipo de alteração é importante para a resolução da equação. De facto, neste tipo de equação que envolve denominadores, o primeiro passo a efetuar é desembaraçar de denominadores, depois de desembaraçar de parêntesis. No caso de os alunos não terem feito a alteração referida, os alunos poderiam enfrentar dificuldades na resolução da equação. Apoiada nestas ações, Ana, ainda, reforça que a resolução de um problema envolvendo equações não termina com a resolução da equação, mas com a resposta ao problema, incentivando o aluno a registar a resposta no quadro.

Ana recorre às *ações de desafiar*, na tarefa *Inscrição no ginásio*, para levar os alunos a concluírem sobre o ginásio mais vantajoso através da análise da representação gráfica das funções que traduzem o valor a pagar em cada ginásio em função do tempo de permanência, como exibe o seguinte diálogo:

> **Professora Ana:** Eu acho que vocês marcaram os pontos até aos seis meses e depois não fizeram mais nada. Nem olharam para o que tinham aí feito, mas se eu agora vos dissesse: será que o gráfico já não indiciava qualquer coisa que vai acontecer na pergunta 3? Tomás.
> **Tomás:** Sim, pode-se dizer que os pontos dos dois ginásios estão a ficar cada vez mais próximos.
> **Professora Ana:** Dos dois ginásios. E isso o que quererá dizer?
> **Tomás:** O preço está-se a aproximar. (...)
> **Professora Ana:** Se nós vos pedíssemos para marcar aí um certo mês que vocês na 3 já descobriram o que é que acontecia com a bolinha e com a cruzinha? (...)
> **Íris:** Ficavam em cima uma da outra. (Aula_Funções_mar 2014).

Ana usa a metodologia de oferecer um raciocínio para os alunos analisarem – *ações de desafiar* – com vista a levá-los a relacionarem as representações gráficas que traduzem os valores a pagar em cada um dos ginásios e a partir daí concluírem sobre o comportamento das duas funções. Essa prática mostra-se eficiente, na medida em que os alunos conseguem comparar as duas funções e relacionar o seu comportamento com a decisão acerca do ginásio mais vantajoso. As *ações de desafiar* de Ana, neste episódio, assumem também a forma de questionamento que tem como finalidade levar os alunos a avançar com hipóteses explicativas para as suas afirmações.

A forma como Ana conduz o discurso (*ações de desafiar*) leva os alunos a encontrarem outras justificações para o comportamento das funções, distintas das que se apoiam, simplesmente, na observação das representações gráficas, como mostra o seguinte excerto:

Íris: Era sempre mais barato, porque não tínhamos pago a inscrição (...) porque como as mensalidades, o *Em Forma* tem uma mensalidade maior do que o *100 Calorias*, aos 10 meses ficavam iguais, então contávamos só as mensalidades e como o *Em Forma* tem uma mensalidade mais cara, ficava mais caro. (...) Porque a diferença entre as duas mensalidades são *5* euros e com *10* meses a diferença passa a *50* que é a inscrição. (...) [A partir do décimo mês] Era a mensalidade mais barata que ficava mais vantajoso (...)
Professora Ana: Portanto, os símbolos invertem. (...) Vocês não têm isso marcado, não é? Mas acho que toda a gente, se continuassem era isso: a dada altura ficavam um sobre o outro e depois... (Aula_Funções_mar 2014).

Os alunos conseguem oferecer outras explicações para as conclusões inferidas, nomeadamente para o facto de o valor a pagar nos dois ginásios ser igual aos dez meses de permanência. Essa justificação apoia-se na relação entre o valor da inscrição e valor da mensalidade em cada um dos ginásios. São, ainda, capazes de justificar o comportamento das duas funções antes e depois do ponto de interseção, baseados no raciocínio estabelecido. Isso é consequência do tipo de questionamento que Ana promove, com vista à justificação de raciocínios e formulação de conjeturas para esses raciocínios – *ações de desafiar*. Ana recorre, também, às *ações de apoiar* para fazer uma breve síntese das conclusões que os alunos tinham estabelecido, de forma a evidenciar os aspetos mais relevantes.

Ana volta a optar por oferecer raciocínios – sugerir a interpretação de uma expressão, através da análise da sequência pictórica subjacente a essa expressão – para levar os alunos a avançarem nas suas ideias iniciais e desenvolverem uma melhor compreensão sobre a escrita de expressões que traduzam o termo geral de uma sequência, na tarefa *Palitos*, como exibe o diálogo que se segue:

Professora Ana: Vocês estão a tentar explicar uma expressão matemática sem olhar para a figura. Será que não conseguimos pensar na figura e ver o que é que aquelas coisas têm a ver com os palitos, com os palitos que lá estão, com as figuras que lá estão? (...) Agora ninguém me pode tentar dizer a Aurora pensou 4 vezes n menos abrir parêntesis n menos 1 fechar parêntesis, pois não? (...) Ela pensou qualquer coisa que tinha a ver com as figuras que estavam em cima e portanto queria que vocês tentassem ver se não há ali qualquer coisa que ajude. (...)
Eva: Eu acho que é o número de palitos da figura. (...) E depois n menos 1 é quando se acrescenta aquilo no meio.
Professora Ana: O n menos 1 é quando se acrescenta aquilo no meio? (...)
Clara: Nós quando juntamos os quadrados temos que tirar 1 do meio se não ficam lá dois. (...)
Aluna: (impercetível) é o número da figura e o n menos 1 é o número de palitos que se tira do meio.

Professora Ana: Ah! (vários alunos falam ao mesmo tempo) O quê, o quê? (...)
Aluna: Ela multiplicou o número de lados de um quadrado.
Professora Ana: Pelo número da figura. E depois?
Aluna: Tirou os palitos que servem para unir os dois. (...)
Professora Ana: O número de palitos que tiramos é sempre o quê? O número da figura menos um. Na figura 3 tira-se 2. Na figura 2 eu tiro 1. (...) Na primeira não tiro. Não sobreponho nada. (Aula_Sequências_nov 2013).

Ana decide oferecer um raciocínio para os alunos analisarem, de modo a ajudá-los a avançar com uma possível explicação para uma expressão do termo geral de uma dada sequência pictórica – *ações de desafiar* – onde frisa que essa justificação deve contemplar a relação entre ordem e termo da figura. Informa, ainda, os alunos que uma justificação baseada somente na leitura em linguagem natural da expressão dada em linguagem matemática não é uma justificação válida – *ações de informar*. A sua opção por fazer esse tipo de alerta prende-se com o facto de ter sido a justificação apresentada por alguns alunos, sendo, portanto, fundamental clarificar que esse tipo de justificação não é matematicamente válida. O raciocínio que Ana oferece mostra-se bastante pertinente, na medida em que desencadeia por parte dos alunos o oferecimento de alguns argumentos. Perante esses contributos, Ana recorre às *ações de apoiar* para repetir o argumento apresentado pelos alunos, mas sob a forma de interrogação. Com essa estratégia de ensino, Ana mostra aos alunos que estão avançar por um bom caminho, contudo é preciso completar ou clarificar esse argumento. A sua intenção é alcançada e as justificações começam a emergir, onde Ana recorre às *ações de apoiar* para completar os contributos dos alunos e os ajudar a avançar com as suas explicações. Apoia-se, ainda, nessas ações para verificar a validade de uma certa conclusão, concretizando com alguns casos particulares.

Ana dá continuidade ao discurso desafiando os alunos a sintetizar os contributos apresentados num pequeno texto escrito – *ações de desafiar* – como traduz o seguinte segmento:

Professora Ana: O que é que vamos escrever?
Aluna: Multiplicou o número de lados de um quadrado pelo número da figura e tirou-se os palitos que estão sobrepostos.
Professora Ana: Pronto, olhem não digo mais nada.
Aluna: Multiplicou os lados de um quadrado. (...)
Professora Ana: E neste caso se calhar podíamos deixar entre parêntesis que os palitos sobrepostos são sempre (...) o número da figura menos 1, não é? Foi isso que dissemos. (Aula_Sequências_nov 2013).

Ana, ao desafiar os alunos a registar por escrito as conclusões estabelecidas oralmente, pretende levá-los a organizar todas as ideias que emergiram na discussão e a relacionarem-nas com a expressão do termo geral apresentado. Recorre, ainda, às *ações de apoiar* para completar o raciocínio da aluna, com vista a destacar um aspeto muito importante da expressão apresentada e talvez a ideia mais forte: análise do padrão que configura a imagem e respetiva associação à ordem da figura. O contributo que Ana introduz na conclusão formulada pelos alunos ("E neste caso se calhar podíamos deixar entre parêntesis que os palitos sobrepostos são sempre (...) o número da figura menos 1, não é?"), permite-lhes melhorar a conclusão que estabeleceram e desenvolver uma compreensão mais aprofundada do que estão a sistematizar, a partir dos seus contributos inicias. Durante esse processo, responsabiliza-os pelas conclusões que retiram e dá-lhes indicação de que estão a corresponder ao esperado ("Pronto, olhem não digo mais nada.") – *ações de apoiar*.

Ana apoia-se nas *ações de desafiar*, na tarefa *Palitos*, para redirecionar para a turma uma questão que lhe foi colocada, como exibe o diálogo seguinte:

> **Professora Ana:** O Daniel está a perguntar o que acontecia na figura 4. O que é que eu fazia na figura 4 aqui?
> **Aluna:** 4 menos 1.
> **Professora Ana:** 4 menos 1. Então vamos fazer as contas. 16 menos 3 que dá?
> **Aluna:** Dá 13.
> **Professora Ana:** 13. Vamos fazer ali a figura 4.
> **Aluna:** 3 vezes 4 mais 1.
> **Aluno:** 12 mais 1.
> **Aluna:** Dá.
> **Aluno:** 4 menos o número da figura.
> **Professora Ana:** É, é. Mas multiplicas primeiro o número da figura por 4. (Aula_Sequências_nov 2013).

Com o intuito de levar os alunos a esclarecerem uma dúvida de um colega, Ana usa a prática de colocar à turma a questão que lhe foi dirigida – *ações de desafiar*. Em simultâneo, usa as *ações de apoiar* para focar a atenção dos alunos no argumento a mobilizar na sua resposta, isto é, induz a expressão na qual os alunos devem concretizar para o quarto termo. Baseada nas mesmas ações, repete os contributos dos alunos e informa qual o passo que se segue no raciocínio que estão a acompanhar – *ações de informar* ("Então vamos fazer as contas. 16 menos 3 que dá?"). Seguidamente, e com o objetivo de levar os alunos a concluírem que o quarto termo da sequência é o mesmo, independentemente da expressão que usam, indica em qual das expressões devem concretizar agora o quarto termo – *ações de apoiar*. Por fim, Ana, ainda, recorre às *ações de informar* para alertar para a prioridade das operações (“Mas multiplicas primeiro o número da figura por 4.”) a realizar numa expressão numérica $[4n-(n-1)]$, em virtude de os alunos já terem determinado o número de palitos que ficam no meio, dados pela expressão que se encontra entre parêntesis (“4 menos 1”).

Em síntese, Ana recorre a quatro tipos de ações para levar os alunos a envolverem-se na discussão coletiva, como se observa no quadro 4 (a seguir). Recorre às ações de informar para dar indicação à turma do seu desempenho na tarefa proposta, no momento de apresentação de estratégias, do número de resoluções distintas que serão apresentadas e da diferença entre elas, do tipo de estratégia seguida e dos grupos que recorrem à mesma estratégia, de explicações que não são matematicamente válidas; para mostrar concordância e transmitir confiança ao aluno que está a apresentar; para alertar para o uso de representações diferentes para a mesma informação, para a importância de apresentarem sempre a resposta a um problema e a prioridade das operações na resolução de uma expressão numérica. É de salientar que Ana, por vezes, não informa a turma das diferenças entre as estratégias que estão a ser apresentadas nem dos grupos que usaram o mesmo tipo de resolução, de modo a envolver os alunos na identificação dessas particularidades.

Apoia-se nas ações de elicitar para convidar alunos específicos a apresentar a sua estratégia de resolução, ou a turma, quando todos os alunos recorrem à mesma forma de resolução e para convidar a turma a acompanhar as explicações que são oferecidas para os raciocínios expostos.

Ana recorre às ações de apoiar para acompanhar as explicações dos alunos e os ajudar a organizar o seu raciocínio, com vista a ser transmitido de forma clara, quando estão com dificuldades em fazê-lo, redizer informação apresentada, usando linguagem correta, completar contributos, oferecer interpretações para os raciocínios expostos, questionar com o intuito de orientar a exposição do raciocínio, sintetizar conclusões, repetir contributos sob a forma de questão e focar em aspetos importantes.

Usa as ações de desafiar para levar os alunos a relacionar resoluções, justificar raciocínios, analisar representações gráficas com vista à tomada de decisões, interpretar raciocínios oferecidos pela professora, formular conjeturas, sistematizar informação e responder a questões colocadas pelos colegas.

Quadro 4

Ações de ensino da professora Ana.

Ações da professora	**Objetivos** (levar o aluno a…)
ações de elicitar	• Apresentar as suas estratégias de resolução • Acompanhar as explicações oferecidas pelos alunos que estão apresentar
ações de apoiar	• Organizar o seu raciocínio, de forma a ser transmitido de modo claro • Assimilar linguagem algébrica • Melhorar os seus contributos e explicações • Sintetizar informação • Responder a questões • Focar aspetos importantes
ações de informar	• Conhecer o seu desempenho no momento da apresentação das estratégias de resolução • Verificar o número de resoluções distintas que serão apresentadas e as diferenças entre elas • Identificar o tipo de estratégia seguida e os grupos que recorreram ao mesmo tipo de estratégia • Conhecer a sua posição relativamente ao que está a ser exposto • Usar representações diferentes para a mesma informação • Identificar os passos a seguir na resolução de um problema envolvendo equações • Reconhecer que uma certa explicação não é matematicamente válida
ações de desafiar	• Relacionar resoluções • Justificar raciocínios • Analisar representações, com vista à tomada de decisões • Formular conjeturas • Sistematizar informação • Responder a questões colocadas pelos colegas

Para desempenhar este tipo de ações, com vista a envolver os alunos na discussão, Ana apoia-se, fundamentalmente, no seu conhecimento da prática letiva, em articulação com o da Matemática.

Síntese final

Ana é uma professora com uma vasta experiência de ensino, que atribui uma grande importância à reflexão sobre as suas práticas, tendo, por isso, apostado ao longo da carreira na participação em projetos de investigação.

Ana planifica cuidadosamente o momento de discussão coletiva que pretende implementar em sala de aula, começando por selecionar criteriosamente as tarefas a apresentar aos seus alunos. Essas tarefas são de natureza e desafio diversificado, na medida em que escolhe problemas para trabalhar com os alunos o tópico Equações, explorações para abordar as funções e investigações para fomentar o trabalho dos alunos com sequências. O contexto das tarefas é não matemático e próximo do interesse e vivências dos alunos desta idade, já que propõe jogos de construção, análise das condições oferecidas por dois ginásios e "enigmas", onde pretendem descobrir números desconhecidos. O trabalho dos alunos com as tarefas propostas envolve o uso de representações diversificadas.

Selecionadas as tarefas a propor aos alunos, Ana pensa sobre o propósito que pretende atingir com a discussão, onde identifica os conceitos que os alunos precisam mobilizar para as resolver. Ana antecipa estratégias recorrendo a tentativa e erro, tabela e álgebra para o trabalho dos alunos com as diferentes tarefas. Face a essas estratégias de resolução, a professora prevê selecionar para apresentação estratégias que recorram a representações diversas e organizar as intervenções dos alunos, de modo a levá-los a evoluir do uso de linguagem matemática informal para a formal.

Em sala de aula, inicia a apresentação das estratégias de resolução pelas que recorrem a representações não algébricas avançando, seguidamente, para as que recorrem à álgebra, como previsto na sua planificação da aula. Ana seleciona os alunos para começar a apresentação e discussão das estratégias de resolução, iniciando pela estratégia mais frequente, no caso da tarefa *Palitos*, ou pelas que surgem de forma isolada na turma e que envolvem linguagem matemática menos poderosa (não algébrica), como é o caso das tarefas envolvendo equações.

Ana promove a comparação de estratégias através do estabelecimento de relações entre as diversas resoluções, da interpretação de informação dada em linguagem natural, da indicação da pertinência da escrita da resposta a um problema, da apresentação de expressões diferentes para o termo geral de uma sequência e do alerta da importância de apresentação de informação com rigor. Leva os alunos a avaliar as ideias em jogo através do questionamento, da explicação, da formulação de questões pelos alunos, da introdução de argumentos que carecem de clarificação, da apresentação de interpretações para certos raciocínios e da repetição de argumentos recorrendo a linguagem matemática válida. Ana filtra os contributos mais importantes, de modo a analisar erros cometidos e a manter sempre os alunos envolvidos na partilha de ideias. Ana usa a conclusão da discussão para envolver os alunos no estabelecimento de conexões entre representações matemáticas e na generalização e explicação de relações.

A professora conduz o discurso por um processo de estreitamento seguido de ampliação, já que com o convite à apresentação das estratégias de resolução, Ana pretende ter raciocínios para analisarem – solicitação e discussão de muitas ideias – onde são selecionados aqueles que merecem ser clarificados e aprofundados – filtragem – desencadeando uma nova solicitação e discussão de muitas ideias. A sua opção por esta forma de dirigir o discurso mostra que numa primeira fase se preocupa mais em ter ideias para discutir – conteúdo matemático não filtrado – do que no que vai ser analisado. Posteriormente, quando filtra contributos, a sua intenção muda pois agora a sua preocupação é com os raciocínios que pretende estudar – conteúdo matemático filtrado.

As ações que Ana implementa durante a condução da discussão são de natureza diversa, já que as ações de elicitar servem para convidar alunos específicos a apresentar as suas estratégias de resolução e a turma a acompanhar o que está a ser exposto. As ações de informar são usadas, preferencialmente, por Ana no momento de apresentação das resoluções para dar conta do desempenho dos alunos na resolução das tarefas propostas, do número de resoluções diferentes que surgiram na turma, dos grupos que recorreram à mesma estratégia, do aspeto distintivo entre as resoluções e do tipo de estratégia seguida. As ações de apoiar são usadas pela professora para acompanhar as explicações dos alunos que manifestam dificuldade em transmitir de forma clara os seus raciocínios; redizer informação introduzida pelos alunos, recorrendo a terminologia correta; completar e repetir contributos dos alunos; oferecer interpretações; questionar; focar aspetos importantes do discurso dos alunos e sintetizar informação apresentada. As ações de desafiar servem para incitar os alunos a relacionar resoluções, justificar raciocínios, analisar representações, formular conjeturas, sistematizar informação e responder a questões colocadas pelos colegas.

Ana mobiliza o seu conhecimento da Matemática na antecipação e identificação das estratégias de resolução usadas pelos alunos, nos erros cometidos e representações mobilizados. O seu conhecimento do currículo em articulação com o da aprendizagem e dos alunos e da prática letiva é convocado na escolha das tarefas a apresentar aos alunos e na sequência para apresentação das mesmas, assim como na identificação dos erros cometidos e justificações para esses erros. A forma como envolve os alunos na discussão e como conduz o discurso é suportado pelo seu conhecimento da prática letiva.

CAPÍTULO VIII

O professor Jorge

O caso do professor Jorge encontra-se organizado em três secções, a que se segue uma síntese final. Na primeira secção apresento o seu percurso profissional, destacando os momentos mais marcantes. Na segunda, analiso o trabalho do professor tendo em vista a preparação da discussão coletiva, antes e durante a aula, nomeadamente as tarefas que seleciona para promover o envolvimento dos alunos na discussão, o propósito que tem para a discussão, as estratégias de resolução a usar e as usadas pelos alunos e como a partir do trabalho dos alunos organiza a suas intervenções. Na última secção, analiso as suas práticas de discussão, evidenciando a forma como fomenta a discussão em sala de aula e as ações que desenvolve para promover o envolvimento dos alunos na partilha coletiva. As práticas de discussão de Jorge, antes e durante a aula, são estudadas de forma integrada com o seu conhecimento didático, dada a interligação entre ambos. Em particular, destaco os contributos do seu conhecimento da Matemática, da prática letiva, da aprendizagem e dos alunos e do currículo para o desenvolvimento das suas práticas de discussão.

O percurso profissional

Jorge é um professor com trinta anos de serviço, no momento do estudo, dos quais apenas um foi cumprido numa escola distinta da atual. Ao longo da sua experiência profissional tem desempenhado diversas funções para além da de professor: esteve sete anos ligado aos órgãos de gestão da escola e é, no momento do estudo, presidente do Conselho Geral. Complementarmente, promove algumas formações, especialmente para os seus colegas de departamento, relacionadas com o uso de tecnologias na sala de aula. Esse é um tema do seu interesse e que destaca como um dos aspetos marcantes da sua carreira profissional:

> Talvez o que me tenha marcado sempre neste percurso talvez seja a parte das tecnologias (...) eu recordo-me que comecei a dar aulas, começámos a trabalhar em programação em Fortran, com aqueles "Spectruns" e a partir daí foi sempre, andámos sempre um pouco ligados nessa área da tecnologia que depois acabámos por transpor um bocado para a escola, não é? (EI_set 2013).

Nessas formações, procura desenvolver materiais para os professores usarem a tecnologia na sala de aula, tirando partido destes recursos existentes na escola. Contudo, frisa que atualmente tem proporcionado menos experiências de aprendizagem aos seus alunos recorrendo a tecnologia, do que fazia há alguns anos atrás, fruto de alguma desmotivação que lhe parece estar instalada na profissão docente:

> Temos calculadoras da escola que não faltam, temos quadros interativos, temos os programas de Geogebra, todos e mais alguns, temos todas as condições para fazer atividades (...) mas por que é que nós não fazemos isso agora na escola? Ou, pelo menos, fazemos muito menos, quando antigamente fazíamos muita coisa dessa? Recordo-me quando era aquela questão dos sensores fazíamos atividades dessas em todos os anos do secundário e mesmo no 3.º ciclo e agora fazemos menos e eu não consigo, eu acho que há alguma desmotivação. (EI_set 2013).

Jorge é bastante crítico relativamente à sua prática e, para além de assumir a desmotivação como um fator que o tem condicionado, aponta, também, a pressão do cumprimento dos programas, que se agudizou nos últimos anos. Considera que isso não se verificava quando os alunos tinham no seu plano de estudos a aula de Estudo Acompanhado, que usava para exploração de tarefas diferentes dos tradicionais exercícios ou problemas, que trabalhava com recurso à tecnologia:

> Todas as aulas de estudo acompanhado eu arranjava uma atividade diferente para os miúdos, que não tinha nada a ver com a sala de aula, ou para pensarem, ou com tecnologia ou com isto, e isto obrigava-nos a trabalhar e acho que se fizeram coisas engraçadas. (EI_set 2013).

Relacionado com este seu interesse pelas tecnologias, Jorge participou num encontro sobre essa temática nos Estados Unidos e salientou a pertinência dessa experiência para o seu enriquecimento profissional, através das aprendizagens realizadas nas sessões em que participou e na partilha de experiências com os outros participantes:

> Naquele encontro que fui das tecnologias da Texas nos Estados Unidos (...) vi coisas interessantes (...) há coisas que uma pessoa acaba por trocar com outros colegas, por conversas, e isto, e vi uns materiais, olha fui assistir a esta [sessão] gira e troca [materiais], portanto há sempre coisas importantes, eu acho que esses encontros para mim têm sido bons. (EI_set 2013).

A vontade que Jorge tem em realizar novas aprendizagens leva-o a enfrentar desafios, proporcionados ao longo de diversos anos pelos encontros de professores de Matemática (*ProfMat*): “Fui quase totalista, mas deixei de ser nos últimos dois anos (...) para nós, já há poucas novidades” (EI_set 2013).

O professor tem encontrado na participação em projetos de investigação a oportunidade de desenvolver um tipo de trabalho diferente com os seus alunos e que tem descurado, atualmente, um pouco:

> É sempre um desafio, porque são coisas diferentes (...) neste momento fazemos muito menos em termos de sala de aula (...) de projetos, de trabalhos de grupo, de umas atividades mais de investigação com os miúdos. (EI_set 2013).

Apesar de gostar de desafios, Jorge assume claramente os constrangimentos que estão associados aos projetos que envolvem a presença do investigador em sala de aula:

> Eu acho que nos trazem sempre inibição, porque para todos os efeitos (...) temos uma pessoa estranha na sala. Portanto, são coisas que as pessoas não conseguem estar completamente à vontade, mas sabemos que são coisas que são importantes de serem feitas. (EI_set 2013).

Contudo, ultrapassa essas inibições com a sua vontade de ajudar os investigadores e de enfrentar desafios, apesar de ter consciência da exigência do trabalho subjacente à participação num projeto de investigação:

> Eu acho que se nós temos um colega que está a fazer uma coisa qualquer no qual nós podemos ajudar, por que é que não havemos de colaborar com isso? Portanto, e vamos sempre para a frente, numa dessa, dizer assim, é pá, OK, vou ter mais trabalho, vou ter mais isso, mas pronto, mas eu acho que também é sempre um desafio. (EI_set 2013).

Jorge valoriza bastante o trabalho colaborativo, já que, na sua perspetiva, este favorece a produção de materiais para a sala de aula e a sua realização com os alunos. Esses momentos de trabalho conjunto vêm colmatar essa falta que sente atualmente na escola, por não contemplarem nos horários dos professores essa vertente:

> Nós tínhamos, por exemplo, tardes em que estávamos uma tarde toda, a tarde sempre juntos, isso foi nos tirado, por exemplo. Isto, parecendo que não, estarmos juntos, obrigava-nos a produzir coisas e, se as produzirmos, aplicamo-las. (EI_set 2013).

As aprendizagens que mais valoriza da sua participação nesses projetos são aquelas que têm potencial para se repercutirem nas suas práticas letivas, pois Jorge preocupa-se com o que faz na sala de aula e como faz:

> Para já, eu acho que era de aprendizagem, tudo que é novo para nós eu acho que é importante, são coisas que nos podem alterar algumas das coisas menos boas que nós temos na nossa prática letiva (...) melhorar as nossas práticas letivas. (EI_set 2013).

Destaca aprendizagens realizadas no âmbito de um projeto relacionado com a comunicação matemática, fundamentalmente, na sua vertente escrita: "Como se escreve, como os miúdos devem abordar as perguntas que lhe são feitas" (EI_set 2013). No caso particular deste estudo, salienta a importância de aprofundar um tema matemático tão importante como a Álgebra e que levanta grandes dificuldades aos alunos, principalmente a simbolização e a generalização:

> Eles percebem o conceito, mas depois a parte formal (...) mesmo nas regularidades e sequências, eles conseguem perceber às vezes muito bem as regularidades, mas depois quando têm que formalizar aquilo numa expressão, torna-se um bocadinho difícil. (EI_set 2013).

Jorge encontra no processo de planificação uma forma de refletir sobre a sua prática, olhando para as aprendizagens dos alunos. Identifica os aspetos que na sua opinião precisam de ser retomados para serem aprofundados ou esclarecidos, atendendo às dificuldades dos alunos e às experiências de aprendizagem que lhes proporciona:

> Quando vou fazer a aula de amanhã, vou sempre ver o que é que ficou por fazer, porque houve coisas que os alunos podem não ter percebido (...) ou acho que inovei isto desta maneira e isto correu pessimamente mal, eu acho que na

próxima aula vou ter que repetir tudo outra vez, porque eles não perceberam nada. (EI_set 2013).

Jorge preocupa-se com a aprendizagem dos seus alunos e para os ajudar a superar eventuais dificuldades procura proporcionar-lhes experiências de aprendizagem que estejam de acordo com as suas caraterísticas individuais, tendo, por vezes, necessidade de produzir materiais que tenham essa finalidade: “Eu acho que foi nas sequências e regularidades que eu preparei uma ficha um bocadinho mais adaptada, porque eles tiveram algumas dificuldades” (EI_set 2013). Quando esse trabalho de preparação é feito individualmente é, posteriormente, partilhado com os seus colegas de grupo, principalmente os que lecionam o mesmo ano de escolaridade:

> Eu não faço nada que não dê depois aos colegas, olha, por exemplo, no 8.º ano ainda agora fiz uma ficha e disse à Isaura, eu acho que esta ficha aqui pode ser interessante para isto, vê se vale a pena. (EI_set 2013).

Jorge está habituado a trabalhar em grupo e a partilhar os materiais e experiências com os seus colegas. Procura, também, usar esses momentos para partilhar ideias relacionadas com a prática de sala de aula, nomeadamente, o cumprimento das planificações, a resolução de algumas tarefas, a elaboração de materiais de apoio às aulas e testes:

> Preocupamos em perceber o que é que cada um anda a fazer sempre, mesmo que não nos juntemos (...) nos intervalos estamos juntos e perguntamos: ainda agora este exercício não me deu bem, como é que fizeste aquilo? Onde é que tu vais? Olha, eu estou a pensar fazer esta atividade assim-assim, o que é que tu achas? (...) preparamos algumas coisas juntos e alguns materiais (...) os testes são sempre feitos em conjunto. (EI_set 2013).

Jorge valoriza o trabalho desenvolvido no grupo colaborativo, na medida em que favorece a partilha de experiências e proporciona o desenvolvimento de um trabalho mais sólido e metódico, que ocorre na presença da investigadora:

> Porque obrigam-nos a procurar, obrigam-nos a discutir e eu acho que estes momentos que tivemos (...) de preparação, eu acho que foram muito importantes e as ideias acabam por surgir. Eu acho que é diferente de uma pessoa estar sozinha a trabalhar, mesmo que goste, concorde com as ideias e saber que é importante, às vezes, fazer este tipo de atividades, não é a mesma coisa (...) e as ideias não surgem tão facilmente, e sobretudo maneiras de pensar diferentes que

eu acho que são sempre importantes, o confronto de ideias e acho que é melhor indiscutivelmente. (EF_jun 2014).

O trabalho e as aprendizagens que Jorge realiza no grupo colaborativo não se esgotam aí, mas continuam em casa, em consequência da reflexão que promove sobre as suas ações, com vista ao seu aperfeiçoamento: "preparar em conjunto, em casa pensámos, alterámos, portanto, planeámos a aula" (EF_jun 2014). Considera que o seu envolvimento neste estudo justifica-se pelos sucessos alcançados e, principalmente, por acreditar que o investimento no desenvolvimento profissional passa pela mudança nas suas práticas: "E eu acho que nesta formação tivemos essas surpresas, eu acho que tudo isso que se calhar nós, teoricamente, e que discutimos antes, acabamos por encontrá-las nas práticas que fizemos na sala de aula" (EF_jun 2014).

Jorge foca o texto *Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios*, de Paula Canavarro (2011), discutido na 2.ª SC, como um marco fundamental no aprofundamento das suas práticas, ao clarificar aspetos importantes do desenvolvimento de discussões matemáticas produtivas:

> Aquele texto inicial que, eu acho que foi um texto que, para mim me diz muito (...) porque ajuda-nos a ver os passos que teremos que fazer e isso foi bom. Eu acho que isso teve reflexos na sala de aula. (...) Se eu disser assim, se eu não tivesse lido aquele texto e tivesse que aplicar isto, eu fazia algumas coisas? Fazia, mas se calhar não as fazia com a sequência que estava, com a maneira mais correta e isto alerta-nos para algumas coisas. (EF_jun 2014).

Embora Jorge reconheça que já integrava algumas dessas orientações na sua prática letiva, destaca o quanto a discussão desse texto foi essencial na clarificação dos propósitos das discussões. Em particular, refere que quando prepara o momento de discussão coletiva pensa no respetivo objetivo, em possíveis respostas que os alunos podem dar e no tipo de ajuda a prestar-lhes perante situações de impasse ou de ausência de respostas:

> Bem, vou lançar isto, porque a ideia, quero chegar ali ou acolá, penso um bocado no tipo de respostas que os alunos poderão dar, pelo menos uma ou duas, poderei não aprofundar tanto como aprofundávamos aqui, porque o facto de estarem quatro ou cinco a trabalhar é diferente de estar só um. (...) Perceber para que eu quero isto, o que é que pode acontecer na sala de aula? Porque pode até acontecer ninguém dizer nada e nós temos que deitar uma achazinha para ver se alguém diz alguma coisa. Faço essa preparação. Não tão formal, se calhar. (EF_jun 2014).

Jorge reconhece potencialidades no trabalho desenvolvido no grupo colaborativo, em particular, na antecipação de possíveis estratégias a usar pelos alunos, na medida em que é enriquecida por estarem diversos professores a pensar sobre a mesma tarefa.

Em síntese, Jorge é um professor que conta com uma ampla experiência de ensino da Matemática dada pelas suas três décadas de atividade, que contemplam para além da docência, a participação em órgãos de administração e gestão da escola e a atividade de formador, na especialidade do uso de tecnologias na sala de aula. Contudo, é um professor crítico, que gosta de enfrentar novos desafios, fundamentalmente, aqueles que lhe podem proporcionar mudanças nas suas práticas. O professor reconhece essa característica neste estudo e salienta a importância do trabalho desenvolvido para o seu enriquecimento profissional, já que se produzem recursos que são, consequentemente, usados em sala de aula. Sublinha também, em resultado da sua participação neste estudo, as aprendizagens alcançadas no domínio da condução de discussões coletivas produtivas.

A preparação da discussão coletiva

Escolha das tarefas e propósito da discussão

Jorge seleciona as tarefas que pretende explorar com os seus alunos de acordo com os conteúdos programáticos que está a abordar em sala de aula e com o trabalho que está a desenvolver no grupo colaborativo. Adicionalmente, procura escolher tarefas que permitam aos alunos envolverem-se em experiências de aprendizagem diversificadas. Assim, aposta em tarefas variadas quanto à sua *natureza* e com níveis de *desafio* elevados, porque considera que essas características promovem a discussão matemática:

> É muito fácil arranjar situações problema em qualquer área da Matemática, onde basta que haja uma pergunta que não seja tão direta (...) que os obrigue a raciocinar, e isso é possível sempre criar alguma discussão matemática, e isso faço regularmente, em função das aulas, do que está a ser dado, normalmente costumo fazer. (EF_jun 2014).

Jorge considera que o envolvimento dos alunos em discussões é favorecido por tarefas com um nível de exigência elevado, que os levem a desenvolver as suas capacidades de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação. Essa característica deve ser compatível com o rigor das questões, isto é, aprecia tarefas que não sejam ambíguas, de modo a não comprometer o trabalho dos alunos: "a qualidade das tarefas construídas para os alunos, não [é dada] só pela sua diversidade, mas também, pela objetividade das questões propostas, face ao que se pretendia" (RI_jul 2014). Considera que as tarefas preparadas no grupo colaborativo e exploradas com os alunos cumprem os requisitos expostos anteriormente, sendo assim pontos de partida importantes para envolver os alunos em discussão coletiva.

A tarefa *Funções e Futebol* (Anexo 10) tem natureza aberta e desafio elevado, privilegiando o uso da calculadora gráfica no estudo da função afim. As tarefas *Eleição do delegado de turma*, *Sacos e bolas*, *O retângulo num quadrado* e *O cavalo e o burro* (Anexo 10) são tarefas de natureza fechada e nível de desafio elevado, privilegiando a interpretação de informação apresentada em linguagem natural e posterior tradução para linguagem matemática. Estas tarefas surgem em *contextos* não puramente matemáticos, podendo favorecer o envolvimento dos alunos na sua resolução. A tarefa *Funções e Futebol*, proposta por Jorge, tem elevado potencial já que os alunos, recorrendo à calculadora gráfica, podem explorar intuitivamente as características da função afim, em particular os conceitos de declive e ordenada na origem. O professor considera que esse é um assunto matemático que levanta grandes dificuldades aos alunos e a apresentação deste contexto pode favorecer a sua compreensão, que pode também beneficiar do uso da calculadora gráfica, já que os alunos visualizam a trajetória seguida pela bola em cada remate que realizam. Frisa que o uso de tecnologia potencia, também, o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de comunicação matemática, em particular da discussão, a partir do trabalho autónomo do aluno:

> Quando começámos (...) a utilizar muito a tecnologia, isto também permitiu (...) dar alguma liberdade ao aluno de atuação, nós tentámos sempre não dar as pistas logo, obrigá-los a raciocinar e a trocar ideias, porque nós nessa altura também fazíamos trabalhos muito de grupo e isso de alguma forma também os obrigava (...) que discutissem eles as ideias e havia sempre aquela ideia, pá, nunca dês a solução final, tenta pô-los a discutir. (EI_set 2013).

A tecnologia possibilita a modelação matemática e a verificação imediata da variação de parâmetros, permitindo ao aluno empenhar-se na atividade matemática e a desenvolver uma atitude mais positiva relativamente a esta disciplina. O aluno ganha maior independência relativamente ao professor, conseguida pela experimentação que a tecnologia possibilita. Esta tarefa, associada à exploração gráfica, favorece a interpretação de conceitos matemáticos abstratos, como o declive e a ordenada na origem. Ao contrário do que faz habitualmente, Jorge recupera esta tarefa do ano anterior por considerar que esta proporciona aprendizagens significativas aos alunos: "Não estou preocupado nem agarrado ao anterior, a não ser que haja uma experiência que tenha sido tão positiva que me justifique, ou uma tão negativa que me justifique não estar a fazer" (EI_set 2013). Embora o professor valorize a exploração de situações novas com os alunos, gosta de aproveitar, de experiências passadas, aquelas que proporcionam aprendizagens significativas e marcam positivamente os alunos no desenvolvimento da sua atividade matemática.

Acerca deste tópico matemático, reflete, ainda, sobre as dificuldades que os alunos enfrentam no uso de simbologia para falar da mesma família de funções: "Alguns já se estão a habituar ao $y = kx$ e depois aparece lá o m, então mas aquilo é a mesma coisa? Eu acho que as coisas complicam-se um bocado mais quando têm 4 letras em causa" (3.ª SC_2 dez 2013).

Jorge reconhece as dificuldades dos alunos no trabalho com as funções, em particular na transição do estudo da função linear para a função afim, sobretudo quando envolve a alteração da simbologia. A exploração da tarefa *Funções e futebol*, pelas caraterísticas já mencionadas (como o contexto e o uso da tecnologia), promove a interpretação e associação de um significado real aos conceitos matemáticos de declive e ordenada na origem, favorecendo, também, o estudo da relação entre dois tipos de funções (linear e afim).

A tarefa *Eleição do delegado de turma* recria uma situação familiar aos alunos, já que todos os anos, no início do ano letivo, eles escolhem o representante da turma. As restantes tarefas, embora surgindo em contexto não puramente matemático, não apelam a contextos tão reais. Contudo, apresentam situações caricatas, como o diálogo entre um cavalo e um burro, na tarefa *O cavalo e o burro*, que procuram discutir quem é que leva mais carga e em que situações nenhum se pode queixar, já que transportam a mesma carga. As tarefas *Sacos e bolas* e *O retângulo num quadrado*, também propostas por Jorge, embora surgindo em contextos não puramente matemáticos, expõem situações mais próximas das tarefas que surgem nos manuais dos alunos. Na tarefa *O retângulo num quadrado*, os alunos têm que mobilizar os seus conhecimentos de Geometria, reconhecendo que um quadrado é também um retângulo, na resolução que recorre apenas à escrita de uma equação do 1.º grau. O professor, ao escolher tarefas parecidas com as que os alunos estão mais habituados, pelo facto de usarem diariamente o manual escolar, mostra que essas tarefas podem servir para promover discussões coletivas, não sendo necessário produzir sempre novos materiais curriculares. A opção por sugerir essas tarefas e não usar as do manual dos alunos está relacionada com o facto do seu colega Afonso não trabalhar com o mesmo manual, embora pertença ao mesmo Agrupamento. Os professores decidem explorar em sala de aula as mesmas tarefas preparadas no grupo colaborativo.

Os alunos, no trabalho com as tarefas, usam diferentes *representações*, por exemplo, na tarefa *Funções e Futebol* utilizam a representação gráfica e algébrica, já que analisam e representam diversas retas representativas da função afim e traduzem essas funções pela sua expressão analítica. Nos problemas relacionados com o tópico Equações e subtópicos equações do 1.º grau e sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, os alunos traduzem a informação apresentada em linguagem natural nos enunciados por equações e sistemas de equações, que depois de resolvidos conduzem à resposta procurada. Nessas tarefas, pretende-se valorizar a representação algébrica, embora os alunos possam resolver as situações apresentadas recorrendo à representação tabular e à numérica.

Após a escolha das tarefas que pretende explorar com os alunos, Jorge define claramente o propósito que pretende alcançar com a discussão coletiva. A preparação da aula contempla a identificação dos *conceitos matemáticos* e de *objetivos específicos* subjacentes a cada conceito:

> O objetivo para esta tarefa [*Funções e Futebol*] é estudar a função afim, em particular, os parâmetros m e b [da expressão $y = mx + b$]. Os alunos também estudam particularidades de retas paralelas. (NC_2 jan 14).
>
> Estas tarefas [*Eleição do delegado de turma* e *Sacos e bolas*] permitem que os alunos resolvam equações com denominadores, depois de traduzirem a informação apresentada em linguagem natural para linguagem matemática. (NC_9 jan 14).
>
> Os alunos resolvem sistemas de equações [com as tarefas *O cavalo e o burro* e *O retângulo num quadrado*], depois de conseguirem traduzir para linguagem matemática o texto apresentado no enunciado. (NC_23 jan 14).

Na preparação da discussão coletiva que faz em sala de aula, Jorge também identifica os *conceitos matemáticos* envolvidos nas resoluções dos alunos. Na tarefa *Funções e Futebol*, os alunos estudam a função afim e analisam, em particular, os conceitos de ordenada na origem e de declive: "Os alunos veem que o local do remate dá a ordenada na origem na equação da reta. Com os vários remates veem que dependendo do local de remate a reta tem que ter declive negativo ou positivo" (NC_ 13 fev 2014). Esta tarefa tem, também, a particularidade de favorecer a *generalização* de relações entre variáveis, concretizada na escrita da expressão analítica da função afim e respetiva ligação ao declive e ordenada na origem.

Jorge verifica, ainda, no acompanhamento que faz aos alunos em sala de aula, que as diversas experiências que estes realizam na calculadora gráfica lhes permitem concluir que a função constante também responde às características solicitadas no enunciado da tarefa: "Alguns alunos apresentam a expressão $y = 0x + local\ do\ remate$" (NC_7 jan 2014). O aparecimento desta expressão é fundamental, para levar os alunos a concluir que no caso do declive ser zero a função é representada por uma reta horizontal e é designada por função constante. Observa ainda que, durante a preparação da discussão coletiva em sala de aula, os alunos generalizam, também, uma propriedade importante para retas paralelas: "No terceiro desafio, os alunos veem que para as trajetórias das bolas serem paralelas têm que ter o mesmo declive" (NC_ 13 fev 2014).

Com o seu trabalho em sala de aula com as tarefas relacionadas com o tópico Equações, os alunos resolvem diversos problemas que lhes permitem interpretar e traduzir informação apresentada sob a forma de texto: "Os alunos identificam a variável e definem as outras em função dessa variável" (NC_13 fev 2014). Jorge salienta que surgem na turma diversas equações para representar a informação dada no enunciado do problema, em consequência da designação atribuída à incógnita: "Eles escrevem três equações diferentes, porque uns consideram que o x é para os votos da Sandra, outros para os da Francisca e outros para os do Lucas" (NC_21 jan 2014). A escrita da equação *generaliza* as relações encontradas pelos alunos na interpretação que fazem da informação apresentada em linguagem natural. A escrita dessa diversidade de equações faz emergir resoluções que envolvem conceitos distintos: "Achei interessante que surgiram na turma equações com denominadores e sem denominadores" (NC_21 jan 2014). O professor destaca que, embora muitos alunos tenham procurado generalizar imediatamente as relações apresentadas, por exemplo, no enunciado da tarefa *Eleição do delegado de turma*, através de uma equação, houve grupos a trabalhar com casos particulares, testando diversas possibilidades até encontrar a resposta ao problema: "Organizaram a sua resolução por passos, onde começam por dividir os 30 votos pelos 3 amigos e depois fazem tentativas a partir do 12, porque viram que o número de votos da Sandra tinha que ser par" (NC_13 fev 2014). Na preparação da discussão coletiva, o professor frisa, ainda, o aparecimento de resoluções onde os alunos, embora não generalizando as relações presentes no enunciado da tarefa, acompanham a sua estratégia com um pequeno texto onde explicam os passos seguidos: "Fazem por tentativa e erro e organizam numa tabela. O curioso é que acompanham a tabela de uma explicação dos passos seguidos" (NC_13 fev 2014).

No acompanhamento que faz ao trabalho dos alunos, Jorge identifica, também, os procedimentos matemáticos adotados nas suas resoluções: "Não têm dificuldade nenhuma a escrever a equação e a resolvê-la. Primeiro desembaraçam de parêntesis e depois reduzem ao mesmo denominador" (NC_13 fev 2014). O procedimento adotado pelos alunos na resolução das tarefas *O retângulo num quadrado* e *O cavalo e o burro* baseia-se, essencialmente, na escrita de um sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, resolvido pelo método de substituição: "Nestas resoluções o problema foi resolvido utilizando um sistema de duas equações a duas incógnitas" (9.ª SC_15 mai 2014).

Em síntese, Jorge escolhe tarefas para apresentar aos alunos que estejam de acordo com os conteúdos programáticos que está a abordar e que promovam a discussão, apostando assim em tarefas com um nível de desafio elevado. Contudo, defende que as tarefas devem ter enunciados precisos, de modo a não comprometer o trabalho dos alunos. Nesta seleção, procura, também, conciliar essas caraterísticas com o seu interesse pessoal pela utilização das tecnologias. As tarefas escolhidas privilegiam contextos não puramente matemáticos e o uso de diferentes tipos de representações, como a algébrica, a gráfica e a tabular. As tarefas que seleciona para a sala de aula, para além de estarem de acordo com os conteúdos programáticos que está abordar, também estão relacionadas com o trabalho que está a ser desenvolvido no grupo de formação. Propõe tarefas que não são trabalhadas no grupo colaborativo, de modo a conciliar o seu interesse pessoal com os contextos, os conteúdos programáticos, o trabalho do projeto e as suas perspetivas sobre as caraterísticas que as tarefas devem satisfazer para serem trabalhadas com os alunos. Na escolha das tarefas a propor aos alunos, o professor mobiliza o seu *conhecimento da prática letiva* em articulação com o do *currículo* e o da *aprendizagem e dos alunos*. A identificação do propósito da discussão é, também, uma prioridade para o professor, onde destaca, previamente, os conceitos e objetivos matemáticos que pretende alcançar e os procedimentos matemáticos a explorar, com vista ao desenvolvimento da generalização. Em sala de aula, na preparação da discussão coletiva, identifica os conceitos e os procedimentos matemáticos envolvidos nas resoluções dos alunos e generalizações feitas. Esse trabalho é apoiado, essencialmente, no seu *conhecimento da Matemática*.

Estratégias de resolução

Na planificação da discussão, Jorge antecipa diversas estratégias de resolução a usar pelos alunos no trabalho com as diferentes tarefas, privilegiando as que recorrem à tentativa e erro, ao uso de tabelas e à escrita de expressões, equações ou sistemas de equações. Por exemplo, antecipa em todas as tarefas a estratégia baseada em *tentativa e erro*, embora na tarefa *Funções e futebol* tenha uma caraterística diferente por consistir na experimentação de vários remates na calculadora gráfica que levam os alunos a escrever expressões representativas da função afim. Nas restantes tarefas, considera que as tentativas podem ser organizadas em *tabelas* que contemplem todas as informações apresentadas no enunciado das tarefas. Nas tarefas *Eleição do delegado de turma* e *Sacos e bolas*, antecipa, também, a estratégia que recorre à escrita de equações, com a incógnita a designar informação diversa – estratégia *algébrica*. Para o professor, essa caraterística é enriquecedora, já que permite a discussão de diversas equações para o mesmo problema e a interpretação e justificação das diferenças. Nas tarefas *O retângulo num quadrado* e *O cavalo e o burro*, os alunos podem traduzir a informação dada em linguagem natural por um sistema de duas equações com duas incógnitas. A preparação da discussão coletiva antes da aula é apoiada no trabalho desenvolvido no grupo colaborativo.

Em sala de aula, Jorge identifica também essas estratégias de resolução nas produções dos seus alunos. Estes encontram na estratégia por *tentativa e erro* uma forma eficaz de resolverem as tarefas apresentadas. Na tarefa *Funções e Futebol*, os alunos escrevem a expressão analítica de diversas funções afins, através da realização de diversos remates à baliza:

> Os alunos fazem diversas tentativas na calculadora para obter a expressão da função afim que verifica as condições pedidas em cada desafio. Os alunos veem se a bola entra na baliza e se não entrar experimentam outra função. Veem, também, se a bola bate nos postes. (NC_13 fev 2014).

Embora, os alunos escrevam diversas expressões representativas da função afim – estratégia *algébrica* – isso só é possível através das diversas experiências que fazem com a calculadora gráfica.

Na tarefa *Eleição do delegado de turma*, os alunos fazem diversas tentativas para os votos que cada um dos candidatos deve ter de acordo com as condições do enunciado, depois de assumirem a divisão equitativa dos votos:

> Há um grupo que vai atribuindo valores aos votos da Sandra e vai vendo os votos com que ficam cada um dos outros. Verifica com isso que a Sandra tem que ter um número de votos par para o Lucas não ficar com meios votos. (NC_13 fev 2014).

Com a experimentação de alguns valores, – *tentativa e erro* – os alunos concluem uma propriedade importante para a resolução da tarefa e que reduz as possibilidades a testar – Sandra tem um número par de votos. Outro grupo também inicia a sua resolução pela divisão equitativa dos votos, contudo organiza as suas tentativas numa *tabela*, em oposição ao seu registo em texto: “Os alunos fazem uma tabela com os votos da Sandra, do Lucas e da Francisca, testando diversos números de acordo com o enunciado até encontrarem a resposta” (NC_13 fev 2014), como antecipado pelo professor na preparação que faz antes da aula.

Na organização dos dados a colocar nas tabelas, os alunos optam por incluir também as proposições a validar, para além dos elementos comparativos que surgem nos enunciados:

> Constroem uma tabela com as bolas retiradas do saco A e as que ficam em cada saco. Fazem também uma coluna com as bolas que ficam depois de multiplicarem as bolas do saco A por $\frac{3}{2}$, para verificarem quando é que a coluna das bolas do saco B é igual a esta. (NC_13 fev 2014).

Esta estratégia de resolução (uso de *tabela*) é valorizada pelo professor, principalmente, por considerar que evidencia de forma mais compreensível o raciocínio dos alunos: “Apesar de também terem resolvido o problema por tentativas, fizeram-no organizando uma tabela, o que torna mais visível o seu raciocínio” (9.ª SC_15 mai 2014).

A estratégia *algébrica* é muito usada pelos alunos, em particular, na tradução de informação dada em linguagem natural para linguagem matemática, através da escrita de equações e de sistemas de equações, como o professor previu na sua preparação da discussão antes da aula. Esta estratégia de resolução favorece a generalização das ideias matemáticas. Os alunos apresentam diversas equações para a tradução da mesma informação dada em linguagem natural, em função da designação atribuída à incógnita: "Nesta tarefa, os alunos atribuem o x tanto à Sandra, como à Francisca, como ao Lucas e isso leva a que apareçam equações com denominadores e sem denominadores o que foi muito interessante" (NC_13 fev 2014). Também este facto foi antecipado por Jorge na sua planificação. O professor destaca a importância desse acontecimento (existência de várias equações para o mesmo problema) para os alunos perceberem a relação entre a solução da equação e a resposta ao problema: "Sobretudo, eles perceberem a diferença, por exemplo, se as equações não têm a mesma solução eles respondem exatamente a mesma coisa" (1.ª SC_1 out 2013). A interpretação da solução de uma equação revela a compreensão que os alunos têm dos assuntos em estudo.

Na tarefa *Sacos e bolas*, o professor salienta o aparecimento de uma estratégia de resolução, não antecipada anteriormente, que faz emergir a escrita de uma equação com denominadores, mas sem parêntesis: "uma resolução apresentada por um grupo que, nós professores, na preparação prévia da aula, não equacionámos" (RI_jul 2014). Essa estratégia fica a dever-se ao facto de o grupo de alunos atribuir a incógnita ao número de bolas que ficam no saco A, em vez de terem considerado, como a grande parte da turma, que a incógnita designa o número de bolas que passam do saco A para o saco B. Os alunos compreendem que o número total de bolas não se altera mesmo que passem de um saco para o outro:

> Os alunos escrevem uma equação muito simples, porque consideram que o x é o número de bolas que ficam no saco A e o B tem que ficar com $\frac{3}{2}$ das do A. Como o saco A tinha 20 bolas e o B tinha 15 então igualam a equação a 35. (NC_13 fev 2014).

Esse acontecimento permite que sejam partilhadas duas interpretações distintas da mesma informação que conduzem a generalizações também diferentes do ponto de vista formal, já que a estratégia mais frequente recorre à escrita de uma equação que envolve o uso de parêntesis e denominadores.

Na resolução das tarefas *O retângulo num quadrado* e *O cavalo e o burro*, os alunos recorrem também a estratégias *algébricas*, baseadas na escrita de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas: "Esta questão de identificar a variável tivemos algum cuidado sempre em reforçar isso e de facto em todos eles é recorrente, a resolução está toda igual [resolução com recurso a sistemas de equações]” (7.ª SC_27 mar 2014). O professor releva que os alunos têm sempre o cuidado de identificar o que a incógnita designa, aspeto essencial na resolução de problemas envolvendo equações ou sistemas de equações. De facto, em algumas resoluções foi apenas o aspeto distintivo, já que a estratégia subjacente foi a mesma: “Uns usaram o x e o y para representar os sacos do cavalo e do burro e outros o c e o b” (NC_18 fev 2014).

Jorge salienta a importância de a discussão contemplar o uso de diversas designações para a incógnita, para que os alunos compreendam a sua pertinência para a resolução do problema: “Quando estamos a discutir um diz que aquilo é o x, outro diz que é a, perceber que a letra não tem interesse, portanto a simbologia por exemplo é uma coisa que é muito simples numa discussão” (EF_ jun 2014). O trabalho com diversas letras favorece o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda da Álgebra, em especial, do papel das variáveis e das incógnitas.

Na resolução das tarefas relacionadas com o subtópico Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, Jorge ressalta o aparecimento de uma resolução algébrica distinta (por sua sugestão): a passagem de um sistema de equações apenas para uma equação, resultante de uma interpretação diferente da informação apresentada no enunciado: “Neste grupo que demorou de facto menos tempo eu lancei apenas um desafio, disse-lhes apenas para pensarem noutra resolução, em que em vez de começarem pelo retângulo começassem pelo quadrado” (7.ª SC_27 mar 2014). O aparecimento dessa resolução justifica-se pela preparação prévia que Jorge faz da tarefa em casa, em particular, da antecipação de possíveis estratégias a usar pelos alunos na sua resolução. Depois do trabalho feito no grupo colaborativo, o professor volta a refletir, em casa, sobre a tarefa e pensa numa nova estratégia de resolução que permite resolver o problema a partir de uma única equação, em oposição ao recurso ao sistema de duas equações com duas incógnitas (Figura 13):

• A partir do quadrado

x - medida final $\rightarrow$ antes $\quad 2(x+3) = 3(x-3)$

$2x+6 = 3x-9$

$\boxed{x=15}$ - medida do lado do quadrado

logo antes $<$ comp - $15+3=18$

larg - $15-3=12$

Figura 13: Estratégia algébrica com recurso a uma equação para a tarefa *O retângulo num quadrado*.

Nessa resolução, os alunos mobilizam os seus conhecimentos acerca das propriedades do retângulo e do quadrado, em particular que um quadrado é também um retângulo cujas medidas dos seus lados são iguais. Assim, e a partir de um raciocínio inverso, os alunos formulam a equação representada na figura 13, designando por x a medida do lado do quadrado. Atendendo às condições dadas no enunciado, os alunos sabem que o dobro do comprimento é igual ao triplo da largura e que se o retângulo tivesse mais três metros de largura seria um quadrado, logo se a medida do lado do quadrado é representada por x, então a medida da largura do retângulo é representada por $x - 3$. Analogamente, os alunos concluem que a medida do comprimento do retângulo é representada por $x + 3$, já que se o retângulo tivesse menos três metros de comprimento seria um quadrado. Embora Jorge tenha antecipado uma outra estratégia de resolução que também recorre à escrita de uma equação, não a sugere em sala de aula, devido ao seu superior nível de complexidade, já que nesse caso a incógnita representa a medida da largura do retângulo (Figura 14):

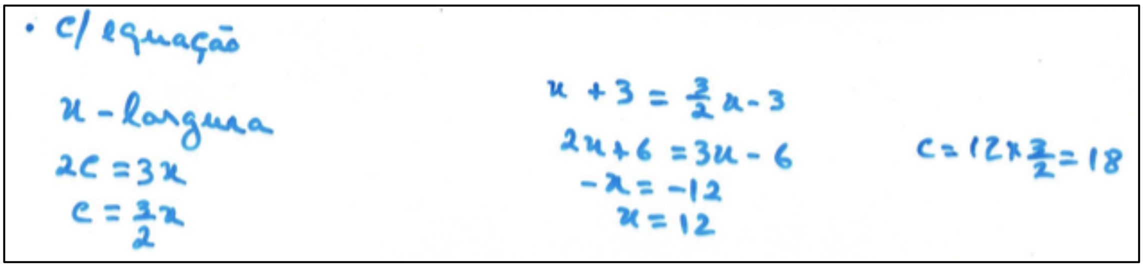


Figura 14: Estratégia algébrica com recurso a uma equação para a tarefa *O retângulo num quadrado* (não apresentada pelos alunos).

Novamente, na tarefa *O Cavalo e o burro*, volta a surgir a estratégia envolvendo a escrita de uma equação, distinta da mais frequente, que consiste na tradução da informação dada em linguagem natural por um sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. Também nesse caso, esta resolução é apoiada pelo professor no acompanhamento que faz ao trabalho dos alunos:

> A equação foi feita de trás para a frente. (...) As resoluções acabam por ser idênticas, é evidente que aquela ali (impercetível) penso que dei a pista na altura de pensarem quando eles tinham igual, carga igual, aquele x, o que queria dizer aquele x? E depois eles conseguiram fazer aquilo. (7.ª SC_27 mar 2014).

Jorge apoia o trabalho dos alunos focando em aspetos essenciais à resolução que pretende incentivar, já que, para além de sugerir a estratégia de resolução de *trás para a frente*, leva-os a pensar sobre a designação da incógnita.

Contudo, dado o nível de desafio associado à tarefa, Jorge considera que os alunos precisam de um apoio mais individualizado durante a fase de trabalho autónomo: "Esta aqui a sensação que tive é que de facto tive de dar mais ajuda, tive que estar mais perto deles, estavam um bocado perdidos (...) apesar de que eles conseguiram fazer" (7.ª SC_27 mar 2014). Esse facto não é surpreendente para o professor, uma vez que na preparação da aula antevê essas dificuldades e, nessa medida, decide apresentar primeiro a tarefa *O retângulo num quadrado*, para motivar o trabalho a desenvolver na tarefa: "Esta [*O cavalo e o burro*] surge, eventualmente, numa parte II. Primeiro apresentamos uma mais simples [*O retângulo num quadrado*]" (6.ª SC_13 fev 2014).

Jorge considera que, para ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades e a avançar nas suas resoluções, pode focar a sua atenção em aspetos determinantes do enunciado da tarefa, sem dizer diretamente o que devem fazer: "Mesmo não dizendo nada, mas tem que se dizer olha bem para esta frase, o que ela quer dizer? Não é? É só nesse sentido que eu acho" (6.ª SC_13 fev 2014). Pretende com esta metodologia não diminuir o nível de exigência da tarefa mas, em simultâneo, manter o interesse e envolvimento dos alunos pela sua resolução.

À semelhança do que acontece na tarefa *O retângulo num quadrado*, também na tarefa *O cavalo e o burro* surge uma estratégia de resolução baseada na escrita de uma única equação, quando a maioria dos alunos da turma recorre ao uso de sistemas de duas equações. Esta estratégia de resolução é sugestionada por Jorge, em consequência do trabalho prévio de preparação que realiza em casa, onde antecipa diversas estratégias de resolução, em particular esta estratégia (Figura 15):

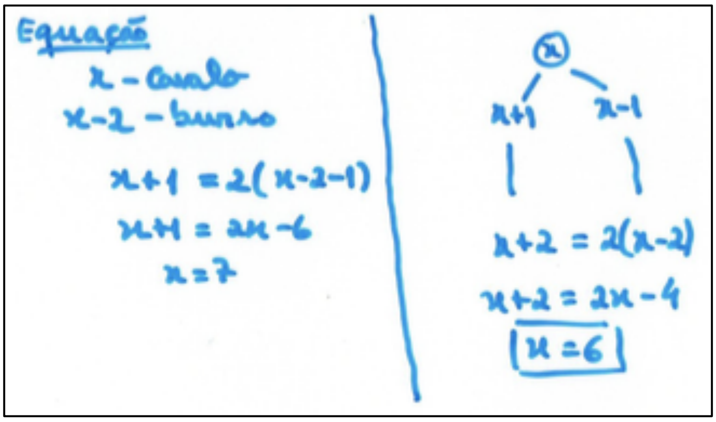


Figura 15: Estratégia algébrica com recurso a uma equação para a tarefa *O cavalo e o burro*.

Nesta estratégia de resolução, os alunos voltam a recorrer à estratégia de trás para a frente, relacionando a carga do cavalo com a do burro, a partir da informação dada em linguagem natural. O professor menciona que os alunos têm sempre o cuidado de verificar a solução encontrada de acordo com os dados do enunciado, antes de apresentarem a resposta ao problema: “Verificam sempre e escrevem a resposta. É algo que insistimos muito com eles” (NC_18 fev 2014). O desenvolvimento deste procedimento favorece a interpretação da solução do sistema e a atribuição de significado às incógnitas.

A estratégia envolvendo raciocínios algébricos não é caraterística só dos problemas do tópico Equações, aparece também na tarefa *Funções e Futebol*, já que os alunos são convidados a verificar se determinados pontos pertencem ou não à função afim dada; a determinar a ordenada na origem (coordenadas do local de remate), sabendo que um determinado ponto pertence à função apresentada (coordenadas do poste) e a verificar o ponto de interseção de duas funções afins:

> No quarto desafio, os alunos tinham que substituir as coordenadas do poste na equação para determinarem o valor do *b*, que dá o local de onde a bola é rematada. Os alunos tinham ainda que ver analiticamente se a bola acertava ou não no poste. No último desafio, tinham que descobrir onde as bolas rematadas por dois jogadores diferentes chocavam. (NC_13 fev 2014).

Jorge considera que o trabalho dos alunos nesta tarefa evidencia o poder das estratégias algébricas relativamente à estratégia de tentativa e erro, e reforça a mobilização de procedimentos algébricos, em particular os envolvidos na resolução de uma equação. Realça que, embora sendo pedido aos alunos para não usarem a calculadora gráfica nestas questões, de modo a desenvolver procedimentos algébricos, estes recorrem muitas vezes a esse material para responder ao solicitado: “A pena foi que os alunos faziam na calculadora. Tinha que andar sempre a dizer que não podiam fazer e agora faz sem ser pela calculadora. Como se faz?” (NC_7 jan 2014). Essa particularidade não surpreende o professor, uma vez que já a tinha antecipado.

Em resumo, Jorge antecipa e identifica estratégias de resolução que recorrem à tentativa e erro, ao uso de tabela e à álgebra no trabalho dos alunos nas diversas tarefas. Valoriza a estratégia tabular por se afigurar como um procedimento mais eficaz na organização das tentativas realizadas. Apoia os alunos no desenvolvimento de estratégias de resolução suplementares e que favorecem o desenvolvimento do seu raciocínio, em virtude do trabalho de preparação individual que faz antes da aula. Todo esse trabalho de preparação da discussão coletiva, antes e durante a aula, que incide na identificação das estratégias de resolução é suportado pelo seu *conhecimento da Matemática*. O professor mobiliza, ainda, esse conhecimento em articulação com o da *aprendizagem e dos alunos* ao sugerir o investimento noutras estratégias de resolução diferentes das apresentadas.

Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação

Na preparação da discussão coletiva, antes da aula, Jorge pensa nas estratégias de resolução que vai selecionar, de acordo com a antecipação feita, e como as vai organizar. Decide organizar as intervenções dos alunos privilegiando a transição da *linguagem matemática informal* para a *formal*. Desta forma, define que a seleção de estratégias deve garantir a apresentação de estratégias de resolução que recorrem à tentativa e erro ao uso de tabelas e de linguagem algébrica, apostando nesta sequência para promover o envolvimento dos alunos em discussão. Este trabalho de antecipação antes da aula é desenvolvido no grupo colaborativo.

Em sala de aula, o professor, ao selecionar as estratégias que pretende levar à discussão coletiva, tem em conta as *representações* usadas pelos alunos nas suas resoluções e os conceitos matemáticos e procedimentos adotados. Organiza as intervenções dos alunos de acordo com o tipo de *linguagem matemática* envolvida nas suas estratégias, iniciando pelas resoluções que usam linguagem matemática informal e evolui para as que recorrem a linguagem matemática formal, de modo a promover o desenvolvimento da capacidade de generalização. As estratégias de resolução que se baseiam em tentativa e erro e no uso da tabela são as primeiras a apresentar na partilha coletiva:

> A razão da escolha da sequência teve a ver com (impercetível), tem a ver com as mais pobres dígamos assim, são aquelas que escolhemos logo para o início, no início a das tabelas que é sempre o grupo que tem mais dificuldades e que revela sempre alguma dificuldade na abordagem, no início das tarefas, já tinha usado outra vez na anterior [*Eleição do delegado de turma* e *Sacos e bolas*]. (7.ª SC_27 mar 2014).

Para Jorge, as resoluções que envolvem linguagem matemática informal são, geralmente, apresentadas pelos alunos que têm mais dificuldades no trabalho em

Matemática. Atribui grande importância à partilha de estratégias diversificadas, mesmo que sejam desenvolvidas apenas por um número muito reduzido de alunos:

> Mas o que é um facto é que, se calhar, muitos dos grupos nem sequer pensaram nessa resolução [tentativas organizadas em texto], avançaram logo para a outra. Portanto, era importante que esta explicação surgisse para eles perceberem o que é que estava ali, não é? (EF_jun 2014).

Com esta abordagem, valoriza o trabalho dos alunos e torna a discussão mais rica através do confronto de diversas estratégias de resolução para a mesma tarefa. Os alunos com uma atitude menos positiva face à Matemática sentem que também dão contributos importantes para a aula, mesmo usando abordagens menos poderosas. Seleciona, de seguida, as resoluções que mobilizam linguagem matemática formal, recorrendo ao uso de sistemas de equações:

> Depois as outras (...) todos os outros grupos fizeram da mesma maneira, a única razão desta última resolução [escrita de uma equação] prende-se com o facto de um grupo que acabou aquilo muito rápido, passado 5-10 minutos tinha aquilo feito, fizeram todos por sistema. (7.ª SC_27 mar 2014).

O professor justifica o aparecimento de uma nova estratégia que também recorre a linguagem matemática formal, mas requer somente a escrita de uma equação, em vez de um sistema de duas equações com duas incógnitas, pelo desafio lançado a um grupo de alunos que termina a resolução da tarefa muito rapidamente. No entanto, frisa que essa resolução surge pela sugestão que lhes dá para tentarem interpretar o enunciado e resolverem pela estratégia de trás para a frente: "Não entrei quase em, sabem o lado do quadrado e agora andem para trás, foi praticamente o que eu disse" (7.ª SC_27 mar 2014). A sua opção por sugerir essa estratégia prende-se pela sua forma de encarar o ensino e, em especial, como lida com a heterogeneidade dos alunos em sala de aula: "Eu acho que é muito importante nós sabermos lidar com miúdos que sabem muito, portanto, e não os podemos desprezar, nós temos que os deixar ir sempre mais além, eu acho que tem que haver essa preocupação" (EF_jun 2014). Para Jorge, o aparecimento de resoluções inovadoras na turma só deve ser mostrado se envolver estratégias de resolução mais acessíveis, quando comparadas com outras já exibidas: "Eu acho que deve haver algum cuidado nisso. Se há algumas que saem até do tipo de resolução tradicional, mas que simplifica muito o problema, eu acho que se deve mostrar, olha esta maneira engraçada" (1.ª SC_1 out 2013).

Atendendo a estes pressupostos, o professor decide levar à discussão coletiva a estratégia de resolução que é desenvolvida apenas por um grupo de alunos. Os alunos são convidados a explicar a sua estratégia de resolução. Jorge, ao refletir sobre a decisão de solicitar a explicação ao grupo de alunos que está a apresentar a estratégia, considera que no futuro pode mudar a sua metodologia, de forma a envolver mais os alunos na discussão. Ou seja, a estratégia é exibida à turma pelos alunos que a realizam mas tem que ser interpretada e explicada pelos restantes colegas:

> Eventualmente, por exemplo, ali podia-se ter mudado um bocado a estratégia (...) o grupo ter posto só a resolução no quadro e tentar que os outros percebessem o que é que eles escreveram, em vez de ter sido o grupo a explicar o que é que fez. (7.ª SC_27 mar 2014).

Essa reflexão resulta do facto de Jorge pensar que a maior dificuldade que enfrenta na condução da discussão é conseguir envolver todos os alunos na partilha de ideias em coletivo:

> Em relação a esta questão das apresentações eles desligam-se um bocado, acho que não mostram muito interesse, acharam que já resolveram aquilo, para que é que eu hei de arranjar outra maneira de resolver? Ou são aqueles mais interessados que até gostam de perceber, mas os outros desligam um bocado, eu já resolvi, já tenho a minha resolução, está muito bem, OK vamos partir para outra. (7.ª SC_27 mar 2014).

Com essa decisão, pode ajudar os alunos a desenvolver a sua capacidade de comunicação matemática, melhorando a verbalização e explicação de raciocínios: "As dificuldades aqui, que eu acho, que se prendem sempre um bocadinho, é tentar que os alunos expliquem por que é que determinada coisa acontece, por que é que não acontece" (EF_jun 2014).

No tópico Equações, o professor opta por selecionar estratégias que envolvem o uso de linguagem matemática formal, concretizada através da escrita de equações diferentes em consequência da designação da incógnita. Considera importante os alunos verificarem que a mesma informação apresentada em linguagem natural pode ser traduzida em linguagem matemática de diversas formas e analisarem as consequências dessas alterações na resolução da equação: "Este poder pensar que há duas maneiras de nós abordarmos a equação, pelo facto de podermos poupar algum trabalho, onde eles normalmente têm alguma dificuldade, que é trabalhar com denominadores, vocês pensem nisto que pode ajudar" (EF_jun 2014).

Jorge destaca a importância desse alerta, em situações futuras, já que os alunos mobilizam esses conhecimentos noutras situações: “Eu percebi que em algumas situações que aplicámos mais à frente e eu lembrava-os disto e alguns mudavam a estratégia de resolução (...) conseguiram perceber que se escolhessem outra abordagem podia melhorar, nesse aspeto acho que foi proveitoso nesse sentido” (EF_jun 2014).

Em resumo, apoiado no seu *conhecimento da Matemática*, Jorge seleciona estratégias de resolução que recorrem ao uso de diferentes tipos de representações (numérica, tabular e algébrica) e mobilizam conceitos e procedimentos matemáticos distintos para a mesma tarefa, por exemplo, de acordo com o antecipado na planificação da aula. Tirando partido do seu *conhecimento dos alunos e da aprendizagem*, em articulação com o da *Matemática* e da *prática letiva*, organiza as intervenções dos alunos de modo a favorecer a transição da linguagem matemática informal para a formal, em consequência das representações usadas nas suas resoluções. Esta opção permite levar à partilha, no coletivo, estratégias menos poderosas do ponto de vista formal e que são, geralmente, desenvolvidas pelos alunos com mais dificuldades. Os alunos com uma atitude mais positiva face a esta disciplina são desafiados a encontrarem estratégias de resolução distintas das apresentadas numa primeira abordagem, de forma a desenvolverem o seu raciocínio. O professor sente-se confortável com esta postura, em virtude da preparação que realiza da aula. Na sua perspetiva, as resoluções menos comuns que surgem na turma só devem ser partilhadas em coletivo se envolverem raciocínios mais simples relativamente aos mobilizados noutras resoluções já apresentadas.

A dinamização da discussão coletiva

Componentes da discussão, discurso

Jorge inicia sempre a discussão coletiva com o convite à apresentação das estratégias de resolução que envolvem a utilização de linguagem matemática menos formal. Na tarefa *Eleição do delegado de turma* dirige o convite a um grupo específico de alunos para *apresentação* de uma estratégia de resolução diferente das demais e menos poderosa algebricamente, já que se baseia na produção de um texto acompanhada de alguns cálculos numéricos que satisfazem as condições dadas no enunciado da tarefa (Figura 16):

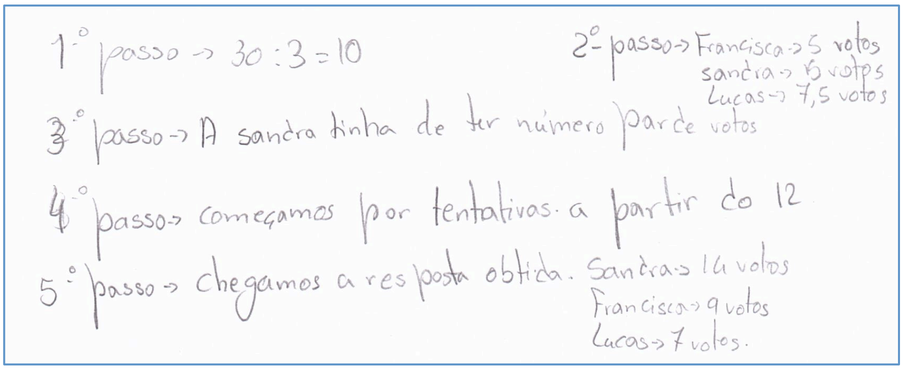

1.º passo → 30 : 3 = 10
2.º passo → Francisca → 5 votos
Sandra → 15 votos
Lucas → 7,5 votos
3.º passo → A sandra tinha de ter número par de votos
4.º passo → começamos por tentativas a partir do 12
5.º passo → chegamos a resposta obtida. Sandra → 14 votos
Francisca → 9 votos
Lucas → 7 votos.

Figura 16: Estratégia de resolução baseada na produção de um texto matemático.

Assim que a resolução é exposta no quadro, Jorge desafia, de imediato, os alunos a analisarem o segundo passo da resposta, dando indicação da existência de um raciocínio errado e incentivando a procura de uma justificação para o erro:

> **Professor Jorge:** Então diz lá Mafalda. Vocês começaram pelo 10, foi? Eu acho que há ali uma coisa que não está muito bem naquele segundo passo. Por que é que aquele segundo passo está mal?
> **Mafalda:** Então porque não há meios votos. (...)
> **Professor Jorge:** A conclusão está correta, mas esse segundo passo não está muito correto, o segundo passo em si. A terceira está correta.
> **Aluno:** Não podemos ter 7 votos e meio.
> **Professor Jorge:** Exatamente. (Aula_Equações_jan 2014).

Embora a aluna apresente uma justificação válida, o professor continua a reforçar a ideia da existência de um erro no segundo passo da resolução, de modo a levar os alunos a procurarem outra justificação, mas valorizando agora o contributo apresentado pelos alunos. O excerto que se segue evidencia como a insistência de Jorge leva os alunos a encontrarem outras razões para a não validade do segundo passo, através da *comparação e avaliação* do raciocínio apresentado com os dados presentes no enunciado da tarefa:

> **Aluno:** É porque 5 mais 15 mais 7 e meio dá 27 e meio e não vai dar 30. (...)
> **Professor Jorge:** A conclusão do grupo é importante. Aquele terceiro passo é importante, porque perceberam que a Sandra tinha que ter sempre um número par de votos, porquê? Porque o Lucas ia ter metade da Sandra. Agora, por que é que aquele segundo passo está mal? Eu sei o que é que vocês raciocinaram, mas se calhar não raciocinaram muito bem. Esse 5 e aquele 15. Vocês começaram com 10, depois viram que o 10 não dava. (Aula_Equações_jan 2014).

O professor continua a reforçar a importância da estratégia apresentada, valorizando as conclusões estabelecidas e *filtrando* as ideias importantes ("perceberam que a Sandra tinha que ter sempre um número par de votos, porquê? Porque o Lucas ia ter metade da Sandra") mas voltando a desafiar os alunos a pensarem novamente no segundo passo, por ainda não terem oferecido todas as justificações válidas para a sua incorreção em termos do rigor da escrita. Contudo, decide focar mais a atenção dos alunos, levando-os a pensar sobre os votos específicos da Francisca e da Sandra, como mostra o segmento de discussão abaixo:

> **Professor Jorge:** Qual era a relação entre os votos da Sandra e da Francisca?
> **Mafalda:** 5 votos de diferença.
> **Professor Jorge:** Então e quantos estão ali no quadro?
> **Aluno:** 10. (impercetível, falam vários alunos ao mesmo tempo)
> **Professor Jorge:** Deixa ficar o 7 e meio, não há problema nenhum. Assim, já está mais de acordo, apesar de que não são 30 votos. Pronto, mas o que o grupo pensou foi o seguinte: bem, pelo menos eu já sei que a Sandra nunca pode ter um número ímpar de votos, portanto e já restringiu nos 30 votos, deitou logo ali uma série de votos fora, tornou mais fácil a conclusão e depois fizeram por tentativas, não foi? (Aula_Equações_jan 2014).

Essa opção conduz os alunos à conclusão pretendida e à apresentação de várias justificações para o raciocínio presente no segundo passo. Jorge pretende alertar os alunos para o rigor da escrita matemática, principalmente, quando deseja ser autossuficiente na mensagem a passar. Embora, os alunos tenham como objetivo apresentar somente uma tentativa que desencadeia a sua estratégia de resolução, Jorge salienta a importância da escrita ser matematicamente rigorosa e exprimir claramente os seus raciocínios.

Para o professor, a discussão cumpre bem o objetivo de mostrar aos alunos os aspetos que precisam de ser clarificados ou corrigidos numa resolução:

> Permitem pelo menos junto dos alunos perceber por que é que erraram, ou por que é que este caminho é o melhor, ou por que é que este é o pior. E isso é possível ser feito com a discussão e se houver confronto do ideias e de resoluções. (EF_jun 2014).

De facto, a turma ao oferecer diversas justificações para as mesmas ideias, Jorge evidencia a sua incompletude e a necessidade de ser reescrita de forma a satisfazer todas as condições necessárias.

O professor promove a discussão a partir da escolha cuidada de um grupo para apresentar a sua estratégia de resolução e continua solicitando contributos, focados, neste caso, na análise de um certo passo da resolução. Esta prática evidencia as aprendizagens realizadas com a sua participação no grupo colaborativo, na medida em que em situações anteriores a discussão não era preparada previamente e decorria em função das ideias que iam sendo apresentadas pelos alunos: "Em função das respostas que me vão dando então assim crio essa discussão ou não" (EI_set 2013).

O discurso sobre o processo de ensino de Jorge mostra que, numa primeira fase, pretende ter muitas ideias para serem discutidas a partir da apresentação da estratégia de resolução de um grupo – *solicitação e discussão de muitas ideias* – não se preocupando, assim, com o conteúdo das mesmas – *conteúdo matemático não filtrado*. Contudo, logo a seguir foca a atenção dos alunos num determinado passo da resolução ("Por que é que aquele segundo passo está mal?") e, mais tarde, oferece um raciocínio para analisarem ("Qual era a relação entre os votos da Sandra e da Francisca?") – *filtragem* – que conduz à *solicitação e discussão de mais ideias*. Nesse momento, tem propósitos explícitos para debater certos raciocínios, com o objetivo de alertar para o rigor da escrita matemática – *conteúdo matemático filtrado*.

Na tarefa *Sacos e bolas*, Jorge inicia a *apresentação* das estratégias de resolução, também, pelas que envolvem linguagem matemática mais informal, mas agora por uma estratégia de resolução seguida por vários grupos – estratégia tabular:

> Também temos resoluções diferentes. Então, vocês fizeram uma tabela, não foi? Houve vários grupos que fizeram tabelas. (...) A Mafalda pode dizer por onde começaram. (...) Explica só uma dessa linhas. Como é que fizeram os cálculos? (Aula_Equações_jan 2014).

Apesar de ser uma estratégia frequente, Jorge incentiva à explicação dos passos seguidos para a elaboração da tabela, promovendo, dessa maneira, a exposição e justificação dos raciocínios seguidos e resultados obtidos.

Continua a promover a *apresentação* das estratégias de resolução avançando para as que envolvem linguagem matemática mais formal, com recurso explícito a conceitos e procedimentos matemáticos, como evidencia a estratégia apresentada pela aluna Silvana:

> **Professor Jorge:** Tomem atenção agora, sobretudo para quem fez a tabela, como é que nós podemos fazer outra abordagem, usando as equações. Só a primeira parte.
> **Silvana:** Então nós, nós pusemos a Sandra como se fosse o x e sabemos que a Francisca, que a Sandra tinha mais 5 votos do que a Francisca, porque a Francisca tinha menos 5 votos do que a Sandra, por isso tinha que ser x menos 5 e o Lucas iria ter metade dos votos da Sandra, logo ia ser x a dividir por 2 e depois fizemos a equação.
> **Professor Jorge:** Sabendo que a soma dos 3 votos tem que dar.
> **Silvana:** 30.
> **Professor Jorge:** OK? Portanto era recorrendo às equações. (Aula_Equações_jan 2014).

O professor alerta os alunos para a importância de compreenderem estratégias de resolução distintas das suas e também mais formais, dando indicação dos conceitos matemáticos que estas envolvem. Procura, com essa prática, que os alunos as mobilizem em situações futuras, na medida em que trabalha com casos gerais ao contrário das anteriormente exibidas que recorrem a casos particulares. Acompanha a exposição de ideias da aluna e volta a reforçar, no fim da sua intervenção, o conceito matemático envolvido na sua estratégia de resolução.

Seguindo na mesma linha de maior formalização das estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, convida outro grupo a mostrar a sua resolução, embora recorrendo à mesma estratégia de resolução – escrita de uma equação. A aluna Filipa apresenta uma resolução na qual o seu grupo atribui a incógnita ao número de votos da Francisca, como mostra o diálogo seguinte:

> **Professor Jorge:** Vou pedir rapidamente a este grupo (...) para perceberem que a abordagem mesmo sendo feita com equações, nem sempre pode ser igual em todos os grupos. Certo?
> (A aluna passa a resolução no quadro)
> Não vale a pena estarmos a resolver, para não perdermos muito tempo. (...) Qual foi a diferença entre a resolução daquele grupo para este grupo?
> **Filipa:** Nós aqui pusemos o x na Francisca e eles puseram na Sandra.
> **Professor Jorge:** Obviamente que se a minha incógnita, o meu x é posto numa pessoa diferente, todos os outros também alteram. Ou seja, enquanto aqui o x vai representar os votos da Sandra, ali foi os da Francisca. Claro que os da Sandra tem mais, vai ser. Vai ser que expressão? Já não é x menos 5 mas sim x mais 5. E o Lucas vai ter metade de qual? Vai ser metade daquele valor. (...) Então e será que havia possibilidades de fazer uma equação daquelas sem denominadores? (Aula_Equações_jan 2014).

Jorge, com o objetivo de levar os alunos a *comparar* as duas estratégias de resolução, informa-os da existência de uma outra estratégia que, embora recorrendo à escrita de uma equação, é distinta da apresentada inicialmente. Pretende, com isso, despertar o interesse dos alunos para analisar e compreender as diferenças presentes nas duas estratégias. Incentiva a aluna a explicar a sua estratégia de resolução, mas rapidamente pega na sua fala e conclui todas as explicações e comparações que deviam ter sido apresentadas pela aluna. Reconhece que, por vezes, se deixa facilmente entusiasmar e envolver na partilha e negociação de ideias e acaba por ultrapassar os alunos, mesmo sem ser essa a sua intenção: "Quando dá conta já está a ultrapassar o aluno, eu isso reconheço que é um defeito que, às vezes, pelo menos eu tenho, não nego" (EF_jun 2014). Neste caso, pretendia desafiar os alunos a pensarem sobre uma outra estratégia de resolução que traz novidades às já apresentadas – escrita de uma equação não envolvendo o uso de denominadores como as anteriores. Associa este fenómeno às expectativas que os professores têm para cada aula e, em particular, para a discussão coletiva: "Porque uma pessoa tem uma expectativa quando vai para uma aula" (EI_set 2013).

O professor, ao querer fazer surgir a escrita de três equações diferentes para a tradução da mesma informação em linguagem verbal, pretende sensibilizar os alunos para as diversas interpretações que podem ser feitas da mesma informação e as respetivas consequências em termos de procedimentos matemáticos que envolvem:

> É importante que as pessoas percebam que há maneiras diferentes de pensar e verem no confronto que chegam ao mesmo resultado pensando por maneiras diferentes e aí, às vezes, nem sempre, mas acontece que os alunos (...) gostam de confrontar as suas ideias. (EF_jun 2014).

Pretende, ainda, que os alunos argumentem sobre as suas ideias, defendendo a sua estratégia de resolução.

O desafio lançado por Jorge é acolhido pelos alunos e a estratégia que quer fazer emergir aparece. Contudo, só é analisada depois de uma outra ter sido abandonada por envolver, simplesmente, a alteração do monómio representado sob a forma de fração para um que recorria o uso do sinal de divisão, como mostra o segmento seguinte da discussão coletiva entre Jorge e o aluno Tomás:

> **Professor Jorge:** Diz lá Tomás. Deixem dizer o Tomás. Diz.
> **Tomás:** O do Lucas é x.
> **Professor Jorge:** Vamos pôr aí o x a dizer. Se o do Lucas for o x. Só quero que me ponhas aí a equação. Se o Lucas for o x.
> **Tomás:** A Sandra fica $2x$.

> **Professor Jorge:** A Sandra fica com $2x$.
> **Tomás:** E a Francisca fica com $2x$ menos 5.
> **Professor Jorge:** A Sandra fica com o dobro. Certo. E a Francisca fica com menos 5 que a Sandra.
> **Tomás:** $2x$ menos 5.
> **Professor Jorge:** Reparem que não tem denominadores. Portanto, reparem: apesar de ser com equações tenho resoluções diferentes. Às vezes até consigo escolher o que é mais fácil. Enquanto aqui vocês têm que trabalhar com denominadores, ali ficou sem denominadores. Está bem? Perceberam? (Aula_Equações_jan 2014).

O professor acompanha a exposição e negociação de ideias do aluno e incentiva-o a exprimir, antes de escrever a equação, uma relação matemática que traduza o número de votos de cada um dos intervenientes da tarefa. Essa opção favorece uma melhor compreensão dos monómios envolvidos na equação pelos restantes alunos da turma e que não pensaram nessa estratégia.

A discussão da tarefa termina com a *conclusão* das principais ideias expostas pelos alunos, onde Jorge reforça a importância de conseguirem escrever equações diferentes para a mesma informação apresentada em linguagem natural e a vantagem de mobilizarem conceitos matemáticos ligeiramente diferentes com níveis de dificuldade também distintos.

O discurso de Jorge sobre o processo de ensino denota a sua preocupação inicial em *solicitar e discutir muitas ideias* com o convite à apresentação e explicação das estratégias de resolução usadas pelos alunos para, de seguida, focar a sua atenção na existência de um conceito matemático mais potente que não trabalha com casos particulares (equação) – *filtragem das ideias partilhadas* – que serve de alavanca à *solicitação e discussão de mais ideias*, através do convite à escrita de uma equação sem denominadores e termina com uma breve *conclusão* da sua parte.

Jorge aproveita, também, o momento de *conclusão* da discussão da tarefa *Sacos e bolas* para destacar procedimentos:

> Esta é ligeiramente mais simples que aquela equação. Aquela tem parêntesis e denominadores. Não se esqueçam que ele primeiro ali tirou os parêntesis. (...) Depois é que foi aos denominadores. (aluno resolve a equação) Perceberam a resolução? Já viram que problemas podem ser abordados de maneiras diferentes. Portanto, dependendo do que eu chamo à variável assim eu tenho uma equação diferente. De certeza que se tudo estiver bem, a solução do problema fica exatamente igual. Ou seja, resolver um problema não tem que ser sempre da mesma maneira. A abordagem pode ser feita de maneiras diferentes, está bem? (Aula_Equações_jan 2014).

Com esta ação, o professor reforça os passos que os alunos devem seguir na resolução de uma equação, de modo a que fiquem claros para todos, principalmente, para os que ainda apresentam dificuldades nesses assuntos. Utiliza, também, esse momento para alertar para a possibilidade de escrita de diversas equações para a mesma informação, em consequência da interpretação de cada um e da designação que atribui à incógnita. Contudo, frisa que a solução do problema é a mesma, apesar das equações terem soluções distintas. Pretende sublinhar as diferentes abordagens que se podem ter na resolução de uma tarefa e transmitir confiança aos alunos mais inseguros, reforçando a validade e importância das diversas estratégias de resolução.

Jorge usa, também, a *conclusão* da discussão para evidenciar que procedimentos algébricos devem adotar na resolução analítica de uma questão:

> Reparem o que o Tomás fez: pegou na expressão, pegou no ponto $(9,7)$. Não se esqueçam que este é o objeto e aquele é a sua imagem e foi à expressão e substituiu: 7 no lugar do y, 2 vezes x que é 9 e o valor do b, para resolver em ordem a b. Fez a conta, 2 vezes 9, 18, a dividir por 3 dá 6, passou o b para o lado de lá e quando passa de um lado para o outro troca o sinal, passou o 7 para o lado de cá e troca o sinal e tirou o valor de b. Estão a ver? Isto é o que é preciso fazer algebricamente. Se não tivermos calculadora temos que fazer assim. Está bem? (Aula_Funções_jan 2014).

O professor alerta para a importância da resolução apresentada, interpretando-a em conjunto com os alunos, de modo a evidenciar que é o procedimento matematicamente válido a adotar em resoluções analíticas. Durante a interpretação que oferece aos alunos, procura explicar claramente todos os passos seguidos, usando o vocabulário adequado. Jorge reconhece que a linguagem associada ao tópico Funções levanta grandes dificuldades aos alunos, em particular os conceitos de objeto e de imagem: "Ali o objeto e imagem, eles confundem aquilo sempre" (3.ª SC_dez 2013). Pretende, assim, contribuir para a clarificação dessas ideias junto dos alunos e fomentar o uso da terminologia associada ao tópico Funções.

Durante a partilha de ideias, o discurso de Jorge vai cumprindo diferentes objetivos. O diálogo seguinte correspondente a um episódio de discussão da tarefa *Sacos e bolas*, em que interage com um aluno (Tomás), evidencia alguns deles:

> **Professor Jorge:** Explica aqui a toda a gente como é que vocês chegaram àquela equação.
> **Tomás:** Então, o saco B é 15. 15 mais x é o que ia ficar depois de tirar as bolas do saco. (...)

Professor Jorge: Uma coisa que é importante e que eu gostava que escrevessem ali é o que é que representa o meu x. Aqui o x representava o quê? As bolas que iam ficar no saco A. O que representa o x ali? (...) Quando se resolve um problema, a primeira coisa é identificar o que é a minha variável.
Tomás: O número de bolas que passam.
Professor Jorge: Então escreve aqui por baixo. (...) Naquele caso o x não representa a mesma coisa que representava no anterior. Estão a ver? (...) Dependendo o que eu chamo à minha variável, assim a equação fica diferente. Então, Tomás vamos lá então concluir. O que representa este primeiro membro?
Tomás: É o saco B.
Professor Jorge: As bolas que ficam no saco B, 15 mais as que passaram. Tem que ser igual a quanto?
Tomás: A 3 meios do que ficam no saco A.
Professor Jorge: 3 meios do que ficam no saco A. O que fica no saco A? São as 20 menos as que passaram para o saco B. Então agora é só resolver a equação. Estão a ver? (Aula_Equações_jan 2014).

Com a primeira intervenção, Jorge pretende *solicitar e discutir muitas ideias* desafiando o aluno a explicar à turma o raciocínio seguido na sua resolução. Contudo, logo após o início da explicação do aluno, interrompe para *filtrar* uma ideia importante – o que representa a incógnita. Essa opção é fundamental para a compreensão da estratégia que está a ser apresentada, principalmente pelos alunos que não a seguiram. Em particular, ao focar a atenção dos alunos na designação da incógnita, favorece a comparação da estratégia que está a ser partilhada com as suas. Seguidamente, volta a *solicitar e discutir mais ideias*, a partir do convite lançado ao aluno para explicar o polinómio escrito no primeiro membro da equação. Com essa ação, garante que o aluno não vai repetir explicações já apresentadas e direciona a atenção da turma para o que pretende ser analisado.

É notório que, inicialmente, Jorge não tem intenção em discutir nenhuma ideia em particular, dando liberdade ao aluno para organizar a sua explicação como entender – *conteúdo matemático não filtrado*. Contudo, com a exposição do aluno, sente necessidade de direcionar a sua explicação para um aspeto específico, importante à compreensão do seu raciocínio – *conteúdo matemático filtrado*. Nessa partilha de ideias, o seu discurso é orientado para a clarificação de uma ideia particular, a designação da incógnita.

Na tarefa *Funções e futebol*, o discurso é encaminhado pelo professor para a formulação de conclusões, como mostra o diálogo que se segue:

Professor Jorge: E como é que vocês fizeram entrar a bola na baliza?
Aluno: Mudámos o declive.

Professor Jorge: Utilizaram o declive. (...) Desses exemplos o que é que podemos concluir relativamente ao declive? (...)
Mafalda: Quando o ponto está maior temos que pôr declive negativo.
Professor Jorge: Quando o ponto está acima das balizas eu tenho que obrigar a que a trajetória esteja descendente. Então o que é que acontece ao declive? Tem que ter o declive.
Aluno: Negativo.
Professor Jorge: Negativo (impercetível) que aquela função afim era decrescente, quando o declive é negativo. Se o declive for positivo eu sei que a função vai estar a crescer. Portanto, e também podemos concluir o quê? Quanto maior for o declive, maior é a inclinação da.
Aluno: Da reta.
Professor Jorge: Da reta, está bem? (Aula_Funções_jan 2014).

Jorge começa por *solicitar muitas ideias para a discussão* desafiando os alunos a explicar um determinado procedimento. Perante a resposta esperada, foca a atenção dos alunos nesse aspeto – *filtragem* – levando-os de imediato ao estabelecimento de algumas conclusões que relacionam o declive com a monotonia da função afim – *solicitação e discussão de muitas ideias*. Durante a apresentação das conclusões dos alunos, vai repetindo os seus contributos mais importantes, para que fiquem mais destacados e acessíveis a todos.

Numa primeira fase, Jorge quer ter muitas ideias para serem discutidas e, portanto, lança uma questão aberta aos alunos convidando-os a introduzir ideias na discussão coletiva – *conteúdo matemático não filtrado*. Logo de seguida, agarra um contributo apresentado por algum aluno para encaminhar a conversa para as conclusões pretendidas – *conteúdo matemático filtrado*.

Em síntese, Jorge organiza a discussão coletiva em três momentos fundamentais: *i)* apresentação; *ii)* comparação, avaliação e filtragem e *iii)* conclusão (Figura 17).

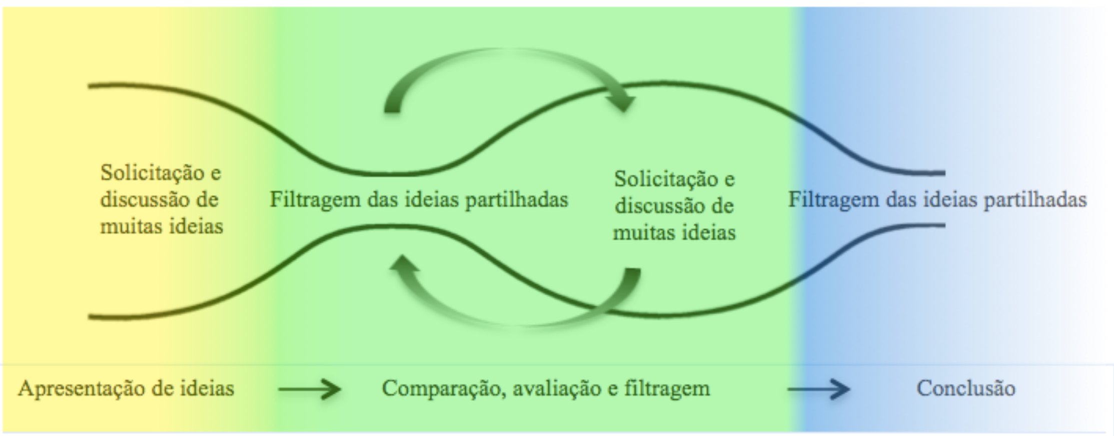


Figura 17: Organização da discussão coletiva do professor Jorge.

Na *apresentação* das estratégias de resolução usadas pelos alunos, Jorge privilegia a transição da linguagem matemática informal para a formal. Inicia as apresentações pelas estratégias de resolução que recorrem à tentativa e erro, organizadas em texto ou em tabela e continua com as que usam linguagem algébrica, como as equações. Esse ponto de partida serve para levar os alunos a *comparar e avaliar* os raciocínios presentes nas diversas estratégias. Para alcançar esse fim, oferece raciocínios para os alunos analisarem e incentiva a comparação de estratégias de resolução, com vista à identificação de diferenças entre elas, embora recorrendo ao mesmo conceito. Ao acompanhar a exposição e explicação de raciocínios, foca os contributos mais importantes dos alunos e *filtra* as mais relevantes para o alcançar dos objetivos pretendidos, de forma a que fiquem acessíveis a todos. A discussão termina com uma breve síntese das principais ideias partilhadas, destacando os conceitos envolvidos e os procedimentos usados nas diversas resoluções apresentadas – *conclusão*.

Durante a condução da discussão, o discurso do professor tem três propósitos distintos. Numa primeira fase, Jorge *solicita muitas ideias para a discussão* através do convite à partilha e justificação de uma ideia. De seguida, *filtra* os contributos dos alunos para pedir para avaliarem um determinado raciocínio, para solicitar a clarificação de uma certa ideia e para a formulação de conclusões. Essa opção origina a *solicitação e discussão de mais ideias*. Esta conduta mostra que o professor, inicialmente, não está muito preocupado com o conteúdo das ideias que são partilhadas – *conteúdo matemático não filtrado*. Contudo, quando filtra as participações dos alunos é para garantir a análise de ideias importantes para a discussão – *conteúdo matemático filtrado*. Na organização e condução da discussão, apoia-se, essencialmente, no seu *conhecimento da Matemática* e *da prática letiva*.

Ações de ensino

A dinamização da discussão realizada por Jorge assenta num conjunto de ações de ensino. Para promover o início da discussão com a apresentação das resoluções dos alunos, recorre às *ações de elicitar*. Estas ações de convite à apresentação das estratégias de resolução dos alunos podem cumprir objetivos distintos, em função da natureza da tarefa e dos seus propósitos. Na tarefa *Funções e Futebol*, atendendo à particularidade de esta ser explorada com o recurso à calculadora gráfica, onde os alunos estabelecem, regra geral, expressões para a função afim através da realização de diversas experiências, inicia a discussão solicitando as ilações que se podem estabelecer a partir do trabalho desenvolvido: "O que é que se reteve deste segundo desafio? Alguém é capaz de dizer? (Aula_Funções_jan 2014). Neste momento, o professor dirige o convite à turma, procurando respeitar a vontade dos alunos participarem, mudando de estratégia quando sente que os alunos que participam são sempre os mesmos:

> Normalmente, quando é as primeiras aulas (...) vou respeitar este que me levantou o braço, mas depois às vezes aquele está sempre a levantar, ou porque é melhor aluno, ou porque gosta muito de participar, então tento desviar um bocado. (EI_set 2013).

No entanto, Jorge altera essa forma de promover a participação dos alunos. Nas restantes discussões coletivas que fomenta, escolhe os alunos que quer convidar para iniciar a apresentação das estratégias de resolução: "Quero que passes exatamente esses passos que tens aí. Depois explicas mais ou menos como é que pensaram" (Aula_Equações_jan 2014). Para além de selecionar o aluno que pretende que comece a partilha de ideias, dá indicação clara do que pretende que seja mostrado e explicado à turma, de modo a evidenciar o que realmente é importante de se analisar.

Nos problemas relacionados com o subtópico dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, Jorge também inicia a apresentação das resoluções, convidando um grupo de alunos a partilhar a sua estratégia:

> Temos aqui pelo menos 3 resoluções ligeiramente diferentes. É provável que não vão os grupos todos, porque já vi que há duas resoluções ou três que são mais ou menos iguais, portanto vamos selecionar. Eu ia pedir primeiro ali ao grupo do Júlio, da Sónia e da Mafalda para fazerem a maneira deles, é só porque é diferente e para verem que podem resolver de maneiras diferentes, está bem? (...) E mais ou menos explicar como é que pensaram para chegar ao resultado. (o aluno começa a passar a resolução no quadro) A ideia era um retângulo passar a um quadrado, já perceberam não é? (Aula_Sistemas de Equações_fev 2014).

Jorge salienta a existência de três tipos de resoluções distintas na turma para a mesma situação, com o intuito de despertar o interesse dos alunos para a comparação da sua estratégia de resolução com a dos colegas – *ações de informar*. Dessa forma, justifica, à partida, a inutilidade de todos os alunos partilharem a sua estratégia de resolução, dadas as semelhanças entre muitos deles. O professor informa, assim, a turma que vai selecionar as intervenções dos alunos e indica o primeiro grupo que é convidado a apresentar o seu trabalho – *ações de informar*. Acrescenta, ainda, que essa estratégia é única na turma, de forma a fomentar a curiosidade dos alunos para a sua interpretação. Reforça, mais uma vez, a existência de abordagens de resolução diferentes para a tarefa, com vista a captar a atenção dos alunos para a diversidade de estratégias que podem ser mobilizadas em situações futuras. O convite dirigido aos alunos para apresentação das suas estratégias de resolução é acompanhado, sempre que sente ser necessário, do pedido de explicações adicionais para os raciocínios empregues – *ações de elicitar*. Antes mesmo do aluno iniciar a explicação da resolução adotada, o professor recorda a turma do objetivo da tarefa, recorrendo, para isso, a *ações de apoiar*. Utiliza também essa ação de apoiar na tarefa *Funções e futebol*, como evidencia o diálogo que mantém com o aluno Marcelo:

> **Professor Jorge:** O que se pretendia aqui era saber o valor de b sabendo que aquela trajetória batia naquele ponto que ali estava, que era o poste, certo? Como é que eu posso saber qual é o valor de b? Alguns eu já vi aí que (...) foram experimentando até dar com a calculadora mas era sem a calculadora. (...) Tens que explicar, o que é que fizeste? (...)
> **Marcelo:** Ó professor, não sei explicar.
> **Professor Jorge:** (impercetível) Porque 9 era o valor de quê?
> **Marcelo:** Do ponto.
> **Professor Jorge:** Da abcissa que é o valor de quê? Que interseta o valor de quê?
> **Marcelo:** Do y.
> **Professor Jorge:** Estão cá as contas, mas não se percebem muito bem. O que é que ele esteve a fazer? Ele esteve a pôr ali o 9 no lugar do x, que era o objeto 9. O que é que ele esteve a fazer? 9 vezes 2 deu 18 depois dividiu por 3 que deu quanto? Deu 6. Deste lado dava quanto? Deu 7. 7 e ali 6. 7 menos 6 dá o valor do b que é 1, só que aquilo está escrito de uma maneira muito estranha. Tomás, fizeste aquilo como deve ser? Eu acho que fizeste. Isto está, raciocínio correto mas a escrita está assim um bocadinho estranha. (...) Vamos lá ver: este é o raciocínio que vocês vão ter que fazer algebricamente quando é necessário, porque depois não vão ter calculadora para fazer isto por tentativas. (Aula_Funções_jan 2014).

Embora Jorge comece por recordar o propósito da tarefa, desafia um aluno a apresentar a justificação da estratégia seguida na sua resolução – *ações de desafiar* – depois de informar a turma da existência de uma estratégia de resolução que não era válida – *ações de informar*. Perante a dificuldade do aluno em expor o seu raciocínio, recorre às *ações de apoiar* para o ajudar a iniciar a sua explicação. Foca a atenção do aluno no valor que representa a ordenada na origem, levando-o a interpretar esse parâmetro ("Porque 9 era o valor de quê?") – *ações de apoiar*. Aproveita para ir repetindo algumas respostas do aluno – *ações de apoiar* – embora recorrendo ao uso da terminologia correta, de forma a que os alunos se habituem a usar progressivamente vocabulário adequado a cada situação. De seguida, sugere uma interpretação para a resolução do aluno – *ações de apoiar* – reforçando a validade do raciocínio e a reduzida clareza na sua apresentação, deixando-o incompreensível à maioria dos alunos. Dessa forma, insta outro aluno a apresentar uma resolução adequada e acessível, destacando que é a estratégia matematicamente correta.

Jorge recorre à *ação de informar* os alunos para os prevenir que vão ser apresentadas duas estratégias de resolução distintas, com o objetivo de lhes solicitar, posteriormente, a sua comparação. Para tal, sugere à aluna Silvana a divisão do quadro em duas partes, para que as resoluções fiquem lado a lado:

> **Professor Jorge:** Agora vamos ver duas resoluções diferentes, usando equações. Divide aí ao meio. Vamos lá ver aquela resolução. A Silvana vai explicar. Vejam lá se percebem aquilo que lá está. (...)
> **Silvana:** Nós tínhamos que o saco A era o x, porque sabemos, pronto que o saco A tinha que ser o x e o saco B era 3 meios de x.
> **Professor Jorge:** Então o x é o número de bolas que iria ficar no saco A. Logo, o saco B ia ficar com quantas? (Aula_Equações_jan 2014).

Jorge incita a aluna a justificar o raciocínio subjacente à estratégia apresentada – *ações de desafiar*. Contudo, durante a exposição da aluna, recorre às *ações de apoiar* para repetir os argumentos apresentados por ela, focando assim a atenção da turma no aspeto fundamental da resolução – designação da incógnita. Com vista a retomar a justificação de Silvana, lança uma questão que direciona a atenção da turma para outro dado relevante – interpretação da solução da equação, como expõe o segmento de discussão que se segue:

> **Silvana:** 3 meios de x.
> **Professor Jorge:** Que era o que lá tinha no enunciado, certo? Pronto.
> **Silvana:** E sabíamos que o número de bolas não se podia alterar, por isso, 20 mais x que era o número total de bolas. Por isso, o número 3 meios de x que era o que ia ficar no saco B e x que era o que ia ficar no saco A tinha que dar na mesma 35. (...)
> **Professor Jorge:** Resolveram e deu x. Então x o que é que era?
> **Silvana:** Era o número de bolas que ficava no saco A.
> **Professor Jorge:** Que ficava no saco A. Então, e agora já consegues perceber quantas passaram de um para o outro? Então quanto tinha inicialmente o saco A?

Silvana: Tinha 20.
Professor Jorge: Então quantas é que passaram? Falta só responder. (...) Perceberam o raciocínio? Portanto, chegou ali àquele x, ao número de bolas que iam ficar no saco A. Depois é só fazer a conta. Se inicialmente tinha 20 e se ficaram lá 14, quantas é que passaram? 16. (...)
Professor Jorge: Oh. 6. É uma resolução muito mais simples, com uma equação muito pequenina. Estão a ver? Então agora vamos à outra resolução. (Aula_Equações_jan 2014).

O professor recorre às *ações de apoiar* para reforçar o pensamento da aluna, fazendo-o de formas distintas: dando indicação da correção do raciocínio apresentado ("Pronto, muito bem.") e apresentando uma interpretação para a ideia exposta ("Que era o que lá tinha no enunciado, certo? Pronto."). Como forma de evidenciar que a obtenção da solução de uma equação nem sempre corresponde à resposta ao problema, Jorge recorre às *ações de apoiar* para direcionar a atenção da turma para a designação da incógnita. Salienta, também, a importância da apresentação da resposta ao problema.

As *ações de apoiar* de Jorge passam, também, por repetir argumentos de forma incompleta, de modo a evidenciar a existência de erros, como neste episódio relativo à tarefa *Funções e futebol*, onde os alunos estudam as caraterísticas de retas paralelas:

Professor Jorge: No desafio 3, portanto nós tínhamos uma função do tipo $4x$, 4 nonos de x que passava na origem e batia num dos postes. E queremos agora arranjar outra que tivesse uma trajetória, que entrasse na baliza e tivesse uma trajetória paralela. O que é que se pretende com este desafio aqui? Para arranjar trajetórias paralelas o que é necessário na minha expressão?
Aluno: Temos que manter o x.
Professor Jorge: Temos que manter.
Aluno: O m.
Professor Jorge: O m, o declive. Portanto, não se esqueçam que retas que tenham a mesma inclinação, quer dizer que são paralelas. Portanto, se eu quero arranjar resolução para isto só tenho que aqui na minha expressão manter que valor?
Aluno: O m.
Professor Jorge: O m. E tenho que fazer variar o quê?
Aluno: A ordenada na origem. (Aula_Funções_jan 2014).

Através de *ações de apoiar*, Jorge recorda o objetivo da discussão, mas dando já uma pista do que é esperado ser contemplado na exposição de ideias. À medida que os alunos vão apresentando contributos para a questão lançada, recorre às mesmas ações para ir reiterando as suas ideias, omitindo os dados incorretos. Com essa ação do professor, os alunos voltam a considerar a resposta incluindo dados novos, que são reforçados por Jorge. Ao repetir argumentos dos alunos, fá-lo corrigindo eventual terminologia inadequada usada pelos alunos e associando as linguagens matemáticas oral e escrita, ou seja, relacionando representações matemáticas. De modo a que as principais conclusões sejam aceites por todos, o professor sintetiza os principais contributos apresentados, antes de fazer uma nova interpelação aos alunos – *ações de apoiar*.

Durante a partilha de ideias, Jorge usa as *ações de desafiar* para levar os alunos a justificar os seus raciocínios, como reflete o segmento de discussão seguinte relacionado com a tarefa *Sacos e bolas*:

> **Professor Jorge:** Como é que fizeram os cálculos?
> **Aluno:** Tirámos 3, ficámos com 17.
> **Professor Jorge:** Vá, tomem atenção. Atenção. Portanto, se tirou 3 bolas, no saco A ficaram.
> **Alunos:** 17.
> **Professor Jorge:** Vá.
> **Aluno:** E no saco B ficaram 18.
> **Professor Jorge:** Então, e o que é esta conta aqui?
> **Aluno:** É o saco *A* vezes 1,5.
> **Professor Jorge:** E o que é o 1 e meio? (falam vários alunos ao mesmo tempo) 3 meios do saco A tinha que dar o saco B. Portanto, e foram experimentando e o único que deu foi 6, está bem? (Aula_Equações_jan 2014).

O professor desafia os alunos a justificar a sua estratégia de resolução, focando-a nos cálculos realizados – *ações de desafiar*. Para dar indicação ao aluno da validade do seu contributo e para que a turma o aceite como importante, repete o argumento do aluno – *ações de apoiar*. Recorre também ao reforço do pensamento do aluno ("Vá") – *ações de apoiar* – para aumentar sua confiança e o fazer avançar na justificação que está apresentar. O questionamento é a ferramenta comunicativa que mais usa para promover a justificação de raciocínios ("Como é que fizeram os cálculos?", "E o que é o 1 e meio?") – *ações de desafiar* – e contribuir, assim, para o desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada dos conceitos e procedimentos em análise.

Jorge insiste no pedido de explicações porque considera ser um das dificuldades maiores dos alunos:

> Só que quando nós os confrontamos no quadro (...) eles têm muita dificuldade em explicar e eu acho, eu pelo menos tenho esse problema (...) a tendência que nós temos é corrigir logo e quando damos conta já estamos nós a falar e os alunos não estão a dizer nada, e isso é um defeito que nós temos, mas isso tem a ver um bocadinho com a dificuldade que os alunos têm em expressar o pensamento deles (...) eles têm imensas dificuldades em expor, em dizer a

justificação, até sabem fazer mas depois chegam ali e têm dificuldade. (EF_jun 2014).

Ao incentivar a justificação dos raciocínios apresentados pelos alunos, o professor favorece o desenvolvimento da sua capacidade de comunicação e a negociação e aceitação de ideias e procedimentos na base do poder dos argumentos apresentados.

O questionamento que Jorge usa de suporte *às ações de desafiar* tem, também, como objetivo clarificar a simbologia usada:

Professor Jorge: Não sei se fizeram todos da mesma maneira. Então, o que é aquela primeira condição? Uma coisa importante: é preciso escrever o que é a letra c e o que é que é a letra l. (...)
Marcelo: O comprimento.
Professor Jorge: E o l?
Marcelo: A largura.
Professor Jorge: Muito bem. (Aula_Sistemas_fev 2014).

Jorge utiliza uma ação eficaz para despertar o interesse da turma para o que vai ser partilhado, lançando a dúvida sobre as estratégias de resolução usadas pelos alunos. Concentra a atenção destes na identificação das incógnitas usadas nas condições escritas. Para tal, questiona diretamente o aluno acerca da simbologia, solicitando a sua interpretação – *ações de desafiar*. Perante os esclarecimentos do aluno, reforça positivamente a sua participação – *ações de apoiar* – de modo a deixar claro para a turma que a interpretação introduzida é válida e que deve ser considerada daí em diante.

Para desencadear a continuação do que está a ser partilhado, o professor, através das *ações de desafiar*, lança uma nova questão, concentrando a atenção do aluno Marcelo na justificação da condição escrita de acordo com o enunciado do problema, como evidencia o diálogo seguinte:

Professor Jorge: E essa primeira condição o que quer dizer?
Marcelo: A largura.
Professor Jorge: Vá Mafalda ajuda aí o Marcelo, ele está um bocadinho perdido.
Mafalda: O $2c$ significa o dobro do comprimento e $3l$ o triplo da largura.
Professor Jorge: E diz lá que é igual? Estou a perguntar. Diz? (Aula_Sistemas_fev 2014).

O professor, perante um contributo incorreto de um aluno, opta por solicitar outro aluno do grupo para o ajudar na justificação, em vez de corrigir a resposta – *ações* *de apoiar*. Mediante a justificação apresentada, Jorge, de forma a envolver a sua colega de grupo (Mafalda) na discussão, lança uma questão que pretende verificar se esta estava a acompanhar o que estava a ser dito e clarificar algum aspeto da resolução que não foi mencionado e é fundamental à compreensão do que está a ser analisado – *ações de desafiar*.

Jorge encoraja a participação da aluna Mafalda, desafiando-a a continuar a justificação das condições escritas na sua resolução, de acordo com o enunciado da tarefa, como é exemplificado no excerto que se segue:

> **Professor Jorge:** E a segunda condição? Já agora ajuda-o.
> **Mafalda:** A segunda condição é a largura, que se a largura tem mais 3 metros, o comprimento vai ter menos 3, logo.
> **Professor Jorge:** Logo, o que é que lá pede? Diz que fica.
> **Mafalda:** Um quadrado, logo é igual.
> **Professor Jorge:** Logo, têm que ser iguais. O facto de ser um quadrado obriga a que o comprimento seja igual à largura. Penso que foi a resolução que mais ou menos os grupos todos adotaram. O Marcelo vai só resolver. (...) O que é que o Marcelo está a fazer ali, Mafalda?
> **Mafalda:** Está a confirmar a resposta.
> **Professor Jorge:** Confirmar? Confirmação. O dobro do comprimento é exatamente, Vera? O dobro do comprimento é exatamente igual...
> **Vera:** Ao tripo da largura.
> **Professor Jorge:** Ao triplo da largura. E se tirar 3 ao comprimento é a mesma coisa que juntar 3 à largura e fica um quadrado, está bem? Muito bem. (Aula_Sistemas_fev 2014).

O professor recorre, mais uma vez, ao questionamento – *ações de desafiar* – para promover o aprofundamento das justificações que estão a ser apresentadas e sejam melhor relacionadas e compreendidas pela turma (“Logo, o que é que lá pede?”). Jorge repete os argumentos da aluna procurando oferecer uma interpretação mais completa e que compare melhor as ideias apresentadas (“O facto de ser um quadrado obriga a que o comprimento seja igual à largura”) – *ações de apoiar*.

Jorge valoriza a apresentação de um aspeto que não esperava (confirmação da solução obtida, tendo em conta as condições do problema), dada a possibilidade de ser realizado mentalmente. Contudo, por lhe reconhecer importância, repete verbalmente o que está a ser feito em linguagem matemática e, de forma a mostrar à turma a sua pertinência, solicita outros alunos para completar as suas afirmações – *ações de apoiar*.

Com vista ao enriquecimento das estratégias de resolução apresentadas, Jorge recorre às *ações de desafiar* para oferecer uma nova estratégia de resolução para os alunos interpretarem, como evidencia o diálogo entre o professor e a aluna Telma:

> **Professor Jorge:** Há aqui outra resolução que eu gostava que vissem. Eu fiz aqui um desafio a um grupo e eu ia pedir-lhes para eles lá porem aquela resolução para verem que há outras resoluções também curiosas de se fazer. (...) O que é que eles fizeram? Chamaram x ao lado do quadrado. Então vá. O que é aquela expressão que aparece ali?
> **Telma:** Isto é o dobro do comprimento que é igual ao triplo da largura.
> **Professor Jorge:** Sim.
> **Telma:** O comprimento é x mais 3 que é.
> **Professor Jorge:** És capaz de me pôr além na figura onde é que fica esse x mais 3? Na figura lá em cima? Naquela figurinha que lá está em cima. Se esse for o x, onde é que é o x mais 3? Então escreve aí. Por que é que é x mais 3? (Aula_Sistemas_fev 2014).

A primeira intervenção do professor vai no sentido de despertar o interesse dos alunos para analisar uma estratégia distinta de todas as já discutidas, justificando a sua existência com o desafio lançado a um grupo. Com essa ação, Jorge mostra como o esforço de um grupo é reconhecido e tem potencialidades para ser partilhado em coletivo. Evidencia, também, que essa estratégia pode ser usada em situações futuras, dado ser matematicamente válida. Procura captar a atenção dos alunos desafiando-os a interpretarem a resolução ("O que é que eles fizeram?, O que é aquela expressão que aparece ali?") – *ações de desafiar*.

Atendendo ao nível de exigência do raciocínio subjacente à estratégia usada, o professor desafia uma aluna a articular a sua justificação com uma representação que lhe oferece: associar a escrita matemática à representação geométrica, em particular às dimensões do quadrado e do retângulo – *ações de desafiar*. Com essa ação, pretende tornar a justificação apresentada mais acessível à turma, para que seja mais facilmente compreendida e possa ser usada em novas situações.

Em resumo, Jorge desempenha na condução da discussão diversas ações de ensino com propósitos diversos, como se observa no quadro 5. Recorre às *ações de elicitar* para convidar os alunos a apresentarem e explicarem as suas estratégias de resolução. Durante essa apresentação, o professor recorre às *ações de apoiar* para recordar o objetivo da tarefa, focar a atenção dos alunos em aspetos relevantes, repetir respostas, corrigir a linguagem matemática usada pelos alunos, evidenciar erros, relacionar representações, reforçar o pensamento dos alunos, sintetizar ideias e completar afirmações. Jorge usa as *ações de informar* para despertar os alunos para a análise de estratégias de resolução distintas e para sugerir representações. Socorre-se das *ações de desafiar* para levar os alunos a justificar raciocínios, a clarificar ideias apresentadas, de modo a ficarem acessíveis à globalidade dos alunos e a interpretar raciocínios oferecidos por Jorge.

Quadro 5

Ações de ensino do professor Jorge.

Ações do professor	**Objetivos** (levar o aluno a…)
ações de elicitar	• Expor e explicar os passos de resolução • Apresentar ilações da tarefa • Dar conta de dificuldades ou incompreensões decorrentes da tarefa
ações de apoiar	• Recordar o objetivo • Focar a atenção num aspeto crítico no raciocínio ou resolução • Refletir sobre linguagem errada ou matematicamente imprecisa • Usar, analisar e relacionar representações • Compreender o sentido do seu pensamento através da indicação da validade da resposta ou da apresentação de uma interpretação • Organizar e sintetizar ideias • Envolver-se na discussão para ajudar na explicação, completar afirmações
ações de informar	• Utilizar uma representação • Reconhecer estratégias de resolução distintas
ações de desafiar	• Justificar raciocínios • Clarificar ideias • Avançar com interpretações

No desempenho das suas ações de ensino na dinamização de discussões coletivas, o professor apoia-se no seu *conhecimento da prática letiva* em articulação com o da *Matemática*, que lhe permite a introdução de raciocínios para serem analisados pelos alunos, a avaliação da linguagem usada pelos alunos, das representações mobilizadas e a identificação dos erros.

Síntese final

Jorge é um professor com uma vasta experiência de ensino, tendo desempenhado, para além da docência, o papel de formador na área das tecnologias no ensino. Costuma participar em projetos de investigação, com vista a melhorar a sua prática e colmatar uma falha que identifica na sua escola – o trabalho colaborativo de professores.

As práticas de discussão de Jorge, na planificação da aula, são marcadas pela escolha cuidada de tarefas matemáticas diversificadas, visando a aprendizagem dos conteúdos programáticos. Aposta em tarefas de investigação e em problemas para desencadear a atividade nos alunos e envolvê-los, posteriormente, na discussão coletiva. Com vista a alcançar esse objetivo, seleciona tarefas que envolvem contextos não puramente matemáticos, que sejam interessantes para os alunos e que usem a tecnologia, de modo a implicá-los na sua resolução. As tarefas propostas apelam ao uso de diferentes tipos de representações, como a algébrica e a gráfica.

Para as tarefas selecionadas, o professor pensa no propósito da discussão, identificando, antes e durante a aula, os conceitos e os objetivos matemáticos que pretende alcançar com a discussão, privilegiando a generalização das relações encontradas. Antecipa, para as tarefas escolhidas, as estratégias que os alunos podem usar, destacando a que recorre à tentativa e erro, à organização em tabela e à álgebra.

Jorge investe bastante na antecipação de estratégias que os alunos podem desenvolver no seu trabalho com as tarefas propostas. Esse trabalho permite-lhe, em sala de aula, desafiar os alunos a ir mais além na procura de outras estratégias de resolução distintas das apresentadas na primeira abordagem à tarefa.

Para escolher as estratégias de resolução que têm potencial para serem apresentadas à turma, Jorge aposta, sobretudo, nas que recorrem a diferentes representações. Pensa chamar os alunos a apresentar as suas estratégias de resolução de forma a evidenciar a transição da linguagem matemática informal para a formal.

O professor conduz a discussão coletiva por três momentos principais: *i)* apresentação, *ii)* comparação, avaliação e filtragem e *iii)* conclusão. A apresentação envolve o convite a alunos específicos para apresentarem as suas estratégias de resolução. Privilegia as resoluções que recorrem a linguagem matemática informal para abrir a discussão. Evolui para as que envolvem linguagem matemática formal, de modo a levar os alunos a comparar e explicar estratégias de resolução distintas, avaliando a sua correção. Sempre que surge uma estratégia não antecipada, Jorge promove a sua apresentação quando considera que é compreensível à globalidade dos alunos.

Jorge usa a conclusão da discussão para sintetizar as principais ideias, salientar procedimentos, em particular as etapas a seguir na resolução de uma equação e os passos a percorrer na resolução analítica de uma questão, frisar o uso de terminologia correta e destacar o propósito que pretende com a discussão.

Durante a condução da discussão, o discurso de Jorge cumpre objetivos diversos. Numa primeira fase, ao pretender ter muitas ideias para serem discutidas, não se preocupa tanto com o conteúdo do que está a ser partilhado, para, de seguida, filtrar as ideias mais importantes que desencadeiam uma nova partilha. O encaminhamento que dá ao seu discurso é para levar os alunos a justificar e clarificar raciocínios e estabelecer conclusões.

As ações de Jorge cumprem diferentes propósitos durante a dinamização da discussão. As ações de elicitar permitem iniciar a discussão através do convite aos alunos para apresentarem e explicarem as suas estratégias de resolução. Através das ações de apoiar, ajuda os alunos a envolverem-se na discussão, recordando o objetivo do que está a ser analisado, repetindo argumentos, corrigindo linguagem, sintetizando ideias, completando afirmações e relacionando representações. Recorre às ações de informar para alertar os alunos para as estratégias de resolução que são apresentadas e para sugerir representações. Usa as ações de desafiar para levar os alunos a justificar raciocínios, clarificar argumentos e interpretar representações.

As práticas de discussão de Jorge são apoiadas no seu conhecimento didático. Em particular, mobiliza o seu conhecimento da Matemática na antecipação e identificação das estratégias de resolução usadas pelos alunos, no acompanhamento que faz à exposição dos raciocínios dos alunos, avaliando-os e sugerindo interpretações e representações. O seu conhecimento do currículo é convocado na definição do propósito que tem para a discussão, em particular, na identificação dos conceitos e objetivos matemáticos que pretende alcançar com a discussão. Recorre ao seu conhecimento dos alunos e da aprendizagem para a escolha das tarefas a propor em sala de aula e para desafiar os alunos a desenvolverem outras estratégias de resolução distintas das apresentadas numa primeira abordagem. Finalmente, o seu conhecimento da prática letiva é mobilizado de forma integrada com as outras vertentes do conhecimento, em especial, na forma como conduz a discussão e como leva os alunos a participarem na troca de ideias.

CAPÍTULO VIII

O professor Afonso

O caso do professor Afonso encontra-se organizado em três secções. Na primeira, apresento o seu percurso profissional, destacando alguns momentos marcantes. Na segunda, evidencio o trabalho de preparação que o professor faz da discussão coletiva, antes e durante a aula. Mostro as tarefas que escolhe para promover a discussão coletiva, o propósito que define para a partilha de ideias, as estratégias de resolução que antecipa e identifica no trabalho dos alunos e como organiza as intervenções dos alunos, em função das suas estratégias de resolução. Na terceira secção, apresento a forma como o professor organiza e promove discussões coletivas em Álgebra. As práticas de discussão do professor na preparação e condução, são analisadas de forma integrada com o seu conhecimento didático, dada a relação entre ambos.

O percurso profissional

Afonso tem, no momento do estudo, vinte e cinco anos de serviço, dos quais apenas os primeiros quatro são cumpridos numa escola distinta da atual. No seu percurso, distingue alguns momentos marcantes relacionados com esses primeiros anos de trabalho. No primeiro, leciona no 2.º ciclo do ensino básico as disciplinas de Matemática e Ciências da Natureza: "Foi engraçado, porque, pronto, a primeira vez que eles tinham aqueles esqueletos e tal, pronto, e eu já tinha ouvido falar há muito tempo, não é, porque o meu curso não tem a ver com isso" (EI_set 2013). Destaca a lecionação da disciplina de Ciências da Natureza como uma prática relevante, dado ter que proporcionar experiências de aprendizagem aos alunos que se afastam diretamente do que tinha estudado ao longo de tantos anos de curso. Outra experiência que destaca como essencial, no seu percurso profissional, é a lecionação ao ensino noturno:

> Foi uma experiência interessante, porque tinha alunos (...) com 60 anos, a idade dos meus pais (...) essas pessoas marcaram-me um bocado, porque (...) eram pessoas muito esforçadas, trabalhavam ao longo do dia, não é, mas sempre muito preocupadas, sempre a porem dúvidas, trabalhava-se muito bem. Pronto, se calhar porque sabiam valorizar… (EI_set 2013).

Afonso salienta a vontade de aprender dessas pessoas e a responsabilidade como encaram o ensino, fruto, também, da sua maturidade e experiência de vida, bem distinta da dos jovens do ensino regular.

Mais recentemente, o professor distingue como experiência marcante a lecionação aos cursos de educação e formação (CEF):

> Com quadros interativos, com jogos, com, pronto. Tentando motivar os miúdos (...) mas fica sempre um bocadinho (...) aquém das nossas expectativas, porque, pronto, nós queremos dar um tipo de formação e (...) o que sai é muito elementar, pronto. A nossa preocupação é prepará-los um bocado (...) para o dia-a-dia. (EI_set 2013).

Afonso destaca as diferenças desse tipo de ensino, fundamentalmente, nas experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos para os conseguir motivar para o trabalho em Matemática, levando-os a adquirir competências básicas essenciais à vida em sociedade. Esses alunos, embora tendo idades próximas dos que frequentam o ensino regular, têm caraterísticas muito próprias, que se refletem no seu fraco interesse pela escola e as suas atividades. Daí apostar nas tecnologias e nos jogos matemáticos para abordar os conteúdos programáticos e, em simultâneo, manter os alunos envolvidos, diversificando as suas experiências de aprendizagem.

Ao longo da carreira, Afonso passou, também, alguns anos pelos órgãos de administração e de gestão da sua escola como Presidente do Conselho Geral. Contudo, é na sala de aula que encontra a sua realização pessoal: "Mas o que eu gosto mesmo é de ensinar" (EI_set 2013). Encontra no trabalho conjunto com os seus colegas de grupo uma forma de apoio ao desenvolvimento da sua prática letiva, em especial na preparação de materiais curriculares: "desde construção de materiais, elaboração de testes, mini-testes, questões aula, tudo isso nós fazíamos em conjunto e partilhávamos os materiais" (EI_set 2013). Esses encontros servem, também, para partilha de experiências relacionadas com a exploração de certos materiais em sala de aula:

> Se há uma outra reação menos positiva nós temos a preocupação de dizer aos colegas, olha eu dei este exercício mas acho que até nem correu assim muito bem. Os miúdos parece que não entenderam muito bem, e eles perceberam melhor outro que eu fiz. Então acho que não vale a pena irmos por aqui. (EI_set 2013).

A análise que o professor realiza, com os colegas, depois das aulas, sobre o trabalho e as dificuldades/ sucessos dos alunos na abordagem a determinadas tarefas, favorece a reflexão sobre as suas práticas e a planificação de experiências de aprendizagens posteriores.

Afonso participa pela primeira vez num projeto de investigação e vê nessa oportunidade uma forma de enriquecer a sua prática letiva: "Estou sempre predisposto a aprender alguma coisa, porque acho que há sempre coisas que nós podemos ganhar em relação a enfrentarmos este tipo de desafios" (EI_set 2013). Ao encarar a sua participação como um desafio é porque reconhece que pode implicar mudanças na sua prática, levando-o a experimentar situações que o podem fazer sair da sua zona de conforto. Identifica potencialidades nos temas abordados na oficina de formação, em particular os associados à promoção de discussões matemáticas:

> Porque penso que, pronto, a discussão de ideias, muitas vezes da discussão de ideias surgem conceções e surgem aprendizagens que de outra forma às vezes levam, levam muito mais tempo e, não só por isso, acho que as pessoas, os miúdos chegarem às suas próprias conceções, pronto, tem uma aprendizagem, eu acho, tem uma aprendizagem completamente diferente, muito mais consolidada. (EI_set 2013).

O professor vê na discussão uma forma de os alunos realizarem aprendizagens significativas, em consequência do seu envolvimento na partilha de ideias, após uma fase de trabalho autónomo. Dessa forma, os conhecimentos emergem da sua participação na aula e não pela transmissão de informação do professor para o aluno.

A Álgebra é outro tema deste estudo que lhe desperta interesse:

> A Álgebra é um dos temas onde os alunos, de um modo geral, revelam muitas dificuldades (...) tema abstrato e, por vezes, difícil de entender por parte de alguns alunos. (...) É esta vontade em combater estes aspectos inibidores da aprendizagem dos meus alunos que procuro experimentar novas situações, usando metodologias variadas. (RI_jul 2014).

Afonso reconhece na promoção de discussões coletivas uma forma de potenciar o trabalho com a Álgebra e, talvez, ultrapassar barreiras, já que é um tema matemático que coloca grandes dificuldades aos alunos, fundamentalmente, na simbologia que mobiliza. Com esse objetivo, o professor aceita realizar aprendizagens que se traduzam em mudanças na sua prática letiva, principalmente aquelas que permitam proporcionar experiências de aprendizagem significativas aos alunos.

A sua participação neste estudo permite-lhe encarar uma vertente de formação que antes nunca tinha experimentado, já que não costuma frequentar encontros de professores de Matemática. Com o trabalho que desenvolve no grupo colaborativo, Afonso destaca aprendizagens relacionadas com a gestão curricular, em particular, as vantagens do envolvimento dos alunos em trabalhos de grupo:

> Alertou um pouco para a importância do trabalho de grupo que nós às vezes descuramos um bocadinho (...) porque dá-lhes espaço para expressarem as suas ideias, para discutirem (...) a forma como às vezes os miúdos chegam a determinadas soluções que não nos ocorrem no imediato. E acho que isso é enriquecedor. (EF_jun 2014).

Afonso vê no trabalho de grupo uma forma de os alunos desenvolverem a sua comunicação matemática nas vertentes da interpretação, da expressão, da representação e da discussão, fundamentais a uma participação consistente na discussão coletiva. Na sua perspetiva, os alunos, ao terem oportunidade de partilhar ideias e de ouvir as dos colegas, conseguem desenvolver um trabalho mais aprofundado na resolução das tarefas, encontrando estratégias de resolução que surpreendem os professores. Considera que o trabalho realizado no grupo colaborativo, na preparação da discussão coletiva, em particular, na antecipação de possíveis estratégias a usar pelos alunos, é importante para lidar, com segurança, em sala de aula, com situações imprevistas:

> Acho que temos a ganhar ainda o facto de planificarmos, tu estás em vantagem na forma como podemos conduzir a discussão, acho eu, pelo menos em determinadas situações, claro que não vamos prevê-las todas, mas se calhar ajuda-nos de alguma forma a não nos apanhar tão desprevenidos, vai haver uma ou outra que… (2.ª SC_24 out 2013).

Embora reconhecendo que há estratégias de resolução que os alunos podem apresentar que não sejam contempladas na sua planificação, Afonso reconhece que esse trabalho é notório, na medida em que pensa em diversas abordagens e mais facilmente avalia a exequibilidade de determinada estratégia, identificando a sua razoabilidade para ser partilhada em coletivo. É surpreendido em sala de aula com uma situação não antecipada, lidando com ela de forma segura: “Eu estou me a lembrar daquela atividade com as bolas, foi muito interessante, pronto, nunca nos ocorria, e uma solução extremamente simples" (EF_jun 2014). Refere-se a esse acontecimento como um aspeto importante e enriquecedor para a discussão, dada a simplicidade da estratégia mobilizada.

Em síntese, Afonso é um professor com vinte e cinco anos de serviço, cumpridos na sua maior parte na escola onde se encontra a lecionar no momento deste estudo. Ao longo da sua carreira, desempenha a função de professor e de Presidente do Conselho Geral da sua escola. É enquanto professor de Matemática que se vê realizado pessoalmente, destacando momentos marcantes nesse trajeto: lecionar ao ensino noturno e aos cursos de educação e formação, pelas caraterísticas específicas dessas experiências. Na primeira, trabalha com alunos com idades bastantes variadas e com experiências de vida muito distintas, que encaram o ensino como a oportunidade que não tiverem noutros tempos. Na segunda, por ensinar alunos que não veem na escola uma forma de investirem no seu futuro. Vê no trabalho colaborativo um meio de desenvolver a sua prática letiva, através da produção de materiais curriculares para as suas aulas e da partilha de experiências resultantes da exploração desses materiais com os seus alunos. Considera a reflexão que faz com os seus colegas uma forma de melhorar a sua planificação e o seu ensino. É a primeira vez que participa num projeto de investigação com uma componente de formação, pois não costuma frequentar encontros de professores de Matemática. Assim, encara o desafio com algum entusiasmo, reconhecendo no grupo colaborativo uma oportunidade para aprender e enriquecer a sua prática letiva, em especial no que se refere à promoção de discussões coletivas produtivas e no aprofundamento da Álgebra Escolar.

A preparação da discussão coletiva

Escolha das tarefas e propósito da discussão

Na planificação da discussão coletiva, Afonso procura escolher tarefas que despertem a curiosidade dos alunos:

> Tentar sempre ir de encontro aos interesses dos alunos (...) tentar arranjar exercícios que não sejam desmotivadores para os alunos. Esse acho que é um ponto de partida importante e depois (...) de uma forma gradual, aliás como nós fizemos: pôr sempre primeiro um exercício um bocadinho mais simples e

> depois, para depois a discussão se tornar mais rica (...) porque se levarmos uma coisa muito complicada eles facilmente se desmotivam e desligam não é? (EF_jun 2014).

Cumprido esse objetivo, Afonso defende que as tarefas devem apresentar um nível de dificuldade crescente nos pedidos que são feitos aos alunos, de forma a não comprometer o seu trabalho. Argumenta que se as tarefas forem demasiado complexas, não promovem a atividade por parte dos alunos. Considera fundamental que os alunos se envolvam na resolução das tarefas que lhes propõe: "O facto de estarem envolvidos motiva-os e depois, se calhar, aí é um passo importante para eles irem procurar, investigar, quererem ir mais além" (EF_jun 2014). Pensa que se os alunos estiverem predispostos a realizar o trabalho que lhes é proposto emergem diversas estratégias de resolução que são, posteriormente, partilhadas em coletivo, comparadas e relacionadas com outras.

Tendo em conta os princípios anteriormente mencionados e o trabalho que está a ser desenvolvido no grupo colaborativo, Afonso escolhe as tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes* (Anexo 10) para apresentar aos seus alunos do 7.º ano e os envolver na procura de regularidades. As tarefas são de *natureza* aberta (investigações) e *desafio* elevado. A primeira delas surge organizada em quatro questões num nível de exigência crescente, com vista à generalização. Os alunos começam por determinar termos próximos e distantes da sequência dada, verificam se um determinado número é termo da sequência, escrevem uma expressão para o termo geral da sequência e comparam-na com uma outra expressão dada.

O professor menciona a escolha das tarefas como um elemento fundamental para promover a aprendizagem dos alunos: "A escolha criteriosa que às vezes temos que ter em relação às tarefas que arranjamos e a esse nível acho que foi importante, pronto" (EF_jun 2014). Nesse sentido, opta por problemas (tarefas de natureza fechada e desafio elevado) para explorar com os alunos dos 7.º e 8.º anos o tópico Equações do 1.º grau – tarefas *A cantina da escola* e *Eleição do delegado de turma* (Anexo 10). A opção por esse tipo de tarefas prende-se com o trabalho que está a ser desenvolvido no grupo colaborativo e com a diversidade de estratégias que os alunos podem usar – "Sobretudo porque pode ser enriquecedor, o mesmo problema ser feito de várias formas, pronto, e haver um grupo que fez de uma maneira e haver outro, mas chegou à mesma solução" (EI_set 2013) – e também para trabalhar situações que os ajudem a superar dificuldades: "Uma outra coisa é, tem a ver com o facto de eles traduzirem linguagem corrente para matemática. Eles próprios dizem que é mais difícil. Até chegar à equação" (5.ª SC_23 jan 2014). Afonso reconhece as potencialidades que a resolução de um problema tem para a discussão coletiva, em particular o confronto e a justificação de diversas formas de o resolver. Salienta, ainda, a importância de averiguar a possibilidade de abordagens diversificadas e verificar a adequação dos resultados com a resposta ao problema. Em linha com o exposto, o professor reconhece nos problemas selecionados uma forma eficaz de lidar com a heterogeneidade dos alunos:

> É um tipo de tema que (...) corremos o risco de os alunos se desmotivarem, tanto os melhores por ser sempre a mesma coisa, como os mais fracos porque muitas vezes não percebem, não chegam lá e chegam a um ponto e desligam, pronto, e acho que aí é importante a parte do trabalho de grupo, a parte da discussão. (EF_jun 2014).

Pensa que as tarefas escolhidas para abordar as Equações do 1.º grau potenciam o trabalho dos alunos que apresentam apreciações diferentes pela Matemática, por oferecerem a possibilidade de abordagens diversificadas. Os alunos com melhor desempenho encontram nessas tarefas uma oportunidade para ampliar conhecimentos e desenvolver outras estratégias de resolução, distintas da técnica rotineira de resolver uma equação. Os outros alunos desenvolvem estratégias que não passam pela resolução algébrica de uma equação mas que permite responder à situação colocada, devolvendo-lhes confiança no trabalho em Matemática. A heterogeneidade de alunos patente numa turma pode traduzir-se numa variedade de estratégias de resolução com potencial para serem partilhadas em coletivo, contribuindo para o desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada dos tópicos em estudo.

A abordagem às Funções com os alunos do 7.º ano é feita com uma exploração (tarefa aberta de desafio reduzido) – Tarefa *Inscrição no ginásio* (Anexo 10). Nessa tarefa, os pedidos surgem, também, num nível de complexidade crescente, tendo em vista a generalização das relações encontradas nos pedidos anteriores. Essa particularidade corresponde às expectativas que Afonso tem para promover a aprendizagem dos alunos e segue em linha com as reflexões partilhadas no grupo colaborativo.

Os *contextos* que Afonso escolhe para as tarefas também são diversificados, à semelhança da natureza e do desafio, favorecendo contextos não puramente matemáticos. As tarefas do tópico Sequências e regularidades promovem o trabalho do aluno a partir da análise de duas construções de figuras, uma no plano e outra no espaço. Essas tarefas funcionam como um jogo de construção que os alunos procuram continuar e que lhes permite responder às questões que vão sendo colocadas.

Os problemas para abordar as Equações favorecem a tradução da informação de linguagem natural para linguagem matemática. A tarefa *Eleição do delegado de turma* apresenta uma situação próxima do quotidiano dos alunos, já que todos os anos, no início do ano letivo, escolhem o delegado de turma. Os alunos analisam as várias informações resultantes da votação e definem estratégias que lhes permitam identificar o vencedor.

A tarefa *A cantina da escola* pretende despertar o interesse dos alunos, a partir da apresentação de informação relacionada com o número de almoços servidos na cantina da escola, e solicitar a sua ajuda para determinar o número de almoços servidos num determinado dia: "Tendo em conta os conteúdos que estávamos a lecionar no 7.º ano, "Equações do 1.º grau", pensámos que seria interessante aplicar uma atividade que relacionasse este conteúdo numa situação em contexto real" (9.ª SC_mai 2014). Afonso tem sempre o cuidado de escolher tarefas que estejam de acordo com os conteúdos programáticos que está abordar no momento com os seus alunos. Nessas tarefas, os alunos têm de ser capazes de compreender o problema, identificar a incógnita e as condições, para delinearem uma estratégia eficaz que lhes permita responder à situação proposta. Atendendo aos contextos em que as tarefas são apresentadas, os alunos sentem necessidade da apresentação de resposta à questão formulada, indo além da identificação do conjunto solução da equação para aqueles que recorrem a estratégias algébricas.

A tarefa *Inscrição no ginásio* surge também num contexto apelativo para os alunos, desafiando-os a comparar as condições oferecidas por dois ginásios, de modo a encontrar o mais vantajoso. Para essa comparação, têm que mobilizar a informação presente no enunciado, nomeadamente o valor da mensalidade e da inscrição. Esse contexto é cada vez mais aliciante para os alunos, já que desde essa idade eles começam a manifestar interesse em frequentar esses locais.

As tarefas escolhidas e exploradas por Afonso em sala de aula apelam ao uso de diferentes tipos de *representações*. A representação gráfica é valorizada no trabalho com a tarefa *Inscrição no ginásio*. Contudo, a representação algébrica é também incentivada, principalmente, na escrita de expressões que traduzam as relações encontradas, após a análise das informações disponibilizadas nos dois ginásios. Essa tarefa promove, ainda, a representação tabular, ao sugerir o preenchimento de uma tabela, resultante da interpretação da informação apresentada em linguagem natural no enunciado.

As tarefas para abordar as Equações do 1.º grau apelam à representação algébrica, depois de os alunos conseguirem traduzir a informação apresentada em linguagem natural em linguagem matemática. Esse tipo de representação é, também, valorizado nas tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades, concretizada na escrita e interpretação de expressões para o termo geral das sequências dadas. Os alunos podem, também, recorrer à representação tabular e à representação numérica no trabalho com as diversas tarefas.

Depois de escolher as tarefas que pretende trabalhar com os alunos, com vista ao seu envolvimento em discussões coletivas, Afonso define o propósito que pretende alcançar. Na sua preparação da aula, identifica claramente os *conteúdos* e *objetivos matemáticos* que pretende explorar:

> O objetivo para estas tarefas [*Palitos* e *Cubos com autocolantes*] é chegarem ao termo geral. (2.ª SC_24 out 2013).
>
> A tarefa *Inscrição no ginásio* tem como objetivo estudar a função afim e a função linear. Os alunos tentam escrever uma expressão para representar estas funções. (NC_12 mar 2014).
>
> O objetivo para esta aula [tarefa *A cantina da escola*] é resolver problemas com equações. Primeiro, os alunos têm que traduzir a informação do enunciado por uma equação. (NC_7 mai 2014).
>
> Com esta tarefa [*Eleição do delegado de turma*] quero que os alunos resolvam equações com denominadores. (NC_21 jan 2014).

Em sala de aula, no acompanhamento que faz ao trabalho autónomo dos alunos, Afonso também identifica os *conceitos* e *objetivos matemáticos* mobilizados nas suas resoluções. Na tarefa *Palitos*, menciona que os alunos identificam a regularidade na sequência dada: "Na primeira questão que era relativamente à pergunta quantos palitos é que tinha a 5.ª figura e a 15.ª, pronto, a maior parte fez com sequência" (4.ª SC_9 jan 2014). Quando se refere ao facto de os alunos terem feito por sequência quer dizer que continuam a escrever a sequência numérica subjacente à sequência pictórica dada para interpretarem. Acrescenta, ainda, que os alunos conseguem *generalizar* a regularidade encontrada, através da escrita do termo geral: "Outros foram pelo termo geral, pronto.

(...) Eles têm: a regra é multiplicar por 3 o número da figura e depois acrescentar mais 1, depois põem entre parêntesis n vezes 3 mais 1" (4.ª SC_9 jan 2014).

Afonso reconhece, ainda, os procedimentos que os alunos usam nas suas resoluções. Por exemplo, na tarefa *Palitos*, para verificarem se um determinado termo pertence à sequência dada, os alunos efetuam as operações inversas às que figuram na expressão do termo geral, também pela ordem inversa: "Pela operação inversa (...) isso há vários a fazerem assim" (4.ª SC_9 jan 2014). O professor já tinha antecipado essa estratégia: "Para ver se determinado termo faz parte da sequência ou não, eles não têm ainda noção da equação e resolvem assim, pronto. Andam para trás" (1.ª SC_1 out 2013).

Na perspetiva de Afonso, o trabalho com sequências é uma boa oportunidade para fazer uma primeira abordagem às equações:

> Ao nível das sequências, o que eu uso, um bocado, para às vezes falar nas equações é o facto de determinado elemento fazer parte da sequência ou não pronto (...) fazerem aquilo ao contrário (...) e se eles virem que aquilo não dá o valor exato é porque não tem ordem, o termo não é. (EI_set 2013).

Esse procedimento não exige, ainda, a familiarização com a terminologia associada às equações, nomeadamente, "termo", "membro", "incógnita" e "solução", nem o conhecimento formal das regras de resolução de uma equação. Os alunos resolvem, de facto, equações por compreensão das operações envolvidas na expressão dada.

Na tarefa *A cantina da escola*, os alunos já resolvem formalmente equações, depois de interpretarem o problema e definirem a incógnita. Afonso salienta a atribuição da incógnita a entes diferentes: "O que enriqueceu aqui foi que eles resolveram de duas formas: (...) houve uns que consideram o x à segunda-feira e houve outros que consideraram à terça-feira" (8.ª SC_8 mai 2014).

Os alunos continuam a resolver equações na tarefa *Eleição do delegado de turma*, embora um grupo também recorra ao uso de uma tabela: "Todos os grupos fazem por equação mas há um que começa por uma tabela" (NC_13 fev 2014). Neste caso, Afonso destaca o uso de procedimentos diferentes para a resolução do mesmo problema. Acrescenta, ainda, que também nesta tarefa emergem equações distintas em função da atribuição da incógnita: "A maior parte dos grupos considerou o x para os votos da Sandra, os outros para a Francisca mas também tivemos um grupo a fazer com os do Lucas, porque eles acabaram rápido" (NC_13 fev 2014). Destaca o aparecimento de uma outra resolução, em consequência do desafio que lança a um grupo. Pensa que essa ação contribui para manter os alunos em atividade, desenvolvendo-lhes o raciocínio e fomentando o gosto pela Matemática: "Aquela estratégia que tivemos quando havia um grupo que chegava demasiado cedo depois dar-lhe mais, para irem mais à frente, fazerem de outra forma, foi importante. Mantivemos sempre os alunos muito motivados e envolvidos" (EF_jun 2014). A estratégia de ensino que o professor usa, decorre das reflexões que realiza no grupo colaborativo e da planificação que faz da aula, permitindo responder com sucesso aos interesses dos alunos.

Na tarefa *Inscrição no ginásio*, Afonso reconhece o uso de variáveis distintas para a escrita da expressão da função afim: "Uns usaram o n outros o x" (8.ª SC_8 mai 2014). Verifica, também, que recorrem a escalas diferentes para a representação gráfica dos valores gastos nos dois ginásios: "Foi o 50 em 50 e o 45 em 45" (8.ª SC_8 mai 2014).

Em suma, Afonso escolhe tarefas para explorar com os alunos em sala de aula que despertem o seu interesse, de modo a envolvê-los na atividade, que estejam de acordo com os conteúdos programáticos que está a lecionar e em articulação com o trabalho que está a ser desenvolvido no grupo colaborativo. Assim, aposta em contextos diferentes que suscitem a sua curiosidade, como ocasiões de jogos de construção que favorecem o trabalho com sequências e regularidades, de análise de condições oferecidas por ginásios para explorar a função afim e eleição do delegado de turma que conduz os alunos à resolução de problemas. A exploração desses contextos potencia o trabalho com diferentes tipos de representações, nomeadamente gráfica, algébrica e tabular.

A diversidade de contextos escolhidos por Afonso surge em tarefas de natureza diferente e de níveis de desafio também distintos, em função dos conteúdos programáticos que pretende abordar e das dificuldades que deseja ajudar os alunos a superar, por exemplo, aposta na resolução de problemas para apoiar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades na tradução de informação de linguagem natural para matemática. Pensa nas tarefas de forma cuidadosa, de modo a que os pedidos que são feitos aos alunos apareçam num nível de exigência crescente. Pensa que essa característica é fundamental para promover o trabalho dos alunos e favorecer o aparecimento de estratégias de resolução diferenciadas que, consequentemente, tornam a discussão coletiva mais rica. A sua convicção é reforçada pelas reflexões que aprofunda no grupo colaborativo.

Depois de decidir as tarefas que pretende trabalhar com os alunos, Afonso pensa no propósito que pretende atingir com a discussão, identificando, antes e durante a aula, os conceitos e objetivos matemáticos estudados, os procedimentos mobilizados e como os alunos generalizam as relações estabelecidas. Nesse trabalho de escolha das tarefas e definição do propósito da discussão, apoia-se no seu *conhecimento da prática letiva* em articulação com o do *currículo*, da *Matemática* e da *aprendizagem e dos alunos*.

Estratégias de resolução

Na planificação que o professor realiza para as diferentes tarefas, antecipa diversas estratégias que os alunos podem recorrer nas suas resoluções. A estratégia por *tentativa e erro* é prevista para todas as tarefas mas envolve, de um modo geral, raciocínios metódicos. Por exemplo, nas tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes*, os alunos podem representar alguns termos da sequência dada ou continuar a sequência numérica subjacente às construções apresentadas. Na tarefa *Eleição do delegado de turma*, os alunos podem começar por experimentar um número redondo (10), correspondente à divisão equitativa dos votos. Contudo, o professor também prevê resoluções que mobilizam raciocínios mais elementares, como na tarefa *Inscrição no ginásio*, onde os alunos podem recorrer a raciocínios recursivos, adicionando sempre a mensalidade a cada uma das modalidades apresentadas. Na tarefa *Eleição do delegado de turma*, os alunos podem, também, atribuir valores arbitrários ao número de votos de cada candidato, assim como na tarefa *A cantina da escola*, podem dar um número qualquer de almoços à segunda ou à terça-feira e definir os restantes dias da semana em função desses. As tentativas experimentadas pelos alunos podem ser organizadas em *tabelas*. Sugere a estratégia tabular, intencionalmente, na tarefa *Inscrição no ginásio*, onde os alunos podem recorrer à tentativa e erro para o seu preenchimento, ou a raciocínios mais sistemáticos como a multiplicação do valor da mensalidade pelo número de meses, adicionando de seguida o valor da inscrição, no caso do ginásio *100 Calorias*.

A estratégia *algébrica* é antecipada por Afonso para todas as tarefas, em consequência do trabalho que desenvolve no grupo colaborativo e porque tem como objetivo promover a generalização de ideias algébricas. Nas tarefas *Palitos* e *Cubos com* *autocolantes*, o professor prevê a escrita da expressão do termo geral para as sequências apresentadas. Nas tarefas *A cantina da escola* e *Eleição do delegado de turma*, a estratégia algébrica é antecipada na escrita de equações com a incógnita a designar entes diversos. Na tarefa *Inscrição no ginásio*, o professor antevê que os alunos escrevam expressões representativas das funções afim e linear, podendo usar letras diferentes para representar a variável. Todo o trabalho de planificação que desenvolve é apoiado no trabalho levado a cabo no grupo colaborativo.

Em sala de aula, Afonso, também, identifica as estratégias de resolução que os alunos utilizam no seu trabalho com as diferentes tarefas. A estratégia que recorre à *tentativa e erro* é bastante frequente nas diversas tarefas exploradas pelos alunos, como antecipado na sua planificação. Nas tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades, por exemplo na tarefa *Palitos*, essa estratégia é usada de uma forma bastante metódica, já que os alunos registam todos os termos da sequência até encontrarem o pretendido:

> Como era a 5.ª figura e a 15.ª foi fazendo o somatório sempre. Pronto, apercebeu-se que havia sempre uma soma de mais (...) 3 e houve alguns que fizeram-me mesmo, pronto, até que chegaram ao 46, foram do 4 até ao 46, sempre somando mais 3, mais 3, mais 3. (4.ª SC_9 jan 2014).

Os alunos começam por traduzir a sequência pictórica apresentada por uma sequência numérica. De seguida, identificam a alteração que ocorre de uns termos para os outros por comparação e, através da abordagem recursiva, registam todos os termos da sequência até encontrarem o pretendido. Baseados no mesmo princípio, outros alunos registam essa ideia numa *tabela*: "Houve outro grupo que fez uma tabela, pronto, mas seguindo a mesma lógica da contagem" (4.ª SC_9 jan 2014).

Na tarefa *Cubos com autocolantes*, os alunos também recorrem à escrita de todos os termos da sequência para determinar termos próximos: "Embora nos 3, nos 4 e nos 10, ainda, muitos deles fizeram a sequência e até colavam os autocolantes e tal e viam, pronto" (4.ª SC_9 jan 2014). Afonso pensa que essa estratégia surge em virtude de ter disponibilizado aos alunos material didático (cubos e autocolantes). Contudo, a sua intenção ao distribuir esse material é favorecer a escrita, com compreensão, de expressões para o termo geral, através da análise dos padrões que configuram as figuras. Apercebe-se, rapidamente, dos problemas da sua opção em ter permitido o acesso ao material desde o início: "Havia alguns que usavam os cubos mas não era para o que interessava" (4.ª SC_9 jan 2014). Nesta tarefa, os alunos também recorrem à *tabela*: "Há um grupo que faz uma tabela (...) e há outro que faz, faz assim: é tipo uma tabela deitada, faz os primeiros 6, depois os 10, depois como era de 4 em 4" (4.ª SC_9 jan 2014). O professor destaca que na organização dos dados na tabela, os alunos registam apenas os termos mais próximos da sequência e os solicitados no enunciado da tarefa, como é o caso do décimo termo.

No tópico Equações, os alunos também recorrem à *tabela* na primeira abordagem que fazem à tarefa *Eleição do delegado de turma*, embora avancem numa fase posterior para a escrita de uma equação: "Fazem por tabela e iniciam pela Sandra com um número redondo, o 10" (NC_13 fev 2014). O facto de terem escolhido para a Sandra esse número de votos para iniciar as suas tentativas pode estar relacionado com o assumir a divisão equitativa dos votos, já que são três candidatos que tinham trinta votos no total. Esta possibilidade é antecipada pelo professor na sua planificação.

A estratégia *tabular* é, também, usada pelos alunos na tarefa *Inscrição no ginásio*, como forma de os apoiar na elaboração da representação gráfica: "Os alunos fazem uma tabela para registar os meses em falta da questão 1 e que precisam para a construção do gráfico" (NC_12 mar 2014). Ainda na tarefa *Inscrição no ginásio*, o professor pensa que os alunos encontram na *tabela* uma forma eficaz de os ajudar a tomar decisões fundamentadas: "Fazem uma tabela para registar a mensalidade paga em cada um dos ginásios ao longo do tempo e decidir durante quanto tempo o ginásio *Em forma* é mais vantajoso" (NC_12 mar 2014).

A estratégia *algébrica* é também bastante usada pelos alunos no seu trabalho autónomo. Por exemplo, na tarefa *Palitos*, os alunos generalizam as regularidades encontradas através da escrita de uma expressão para o termo geral da sequência:

> O termo geral, eles perceberam logo. Como estavam habituados a, de 3 em 3, viram logo que era o $3n$ e depois fizeram o mais 1. (...) Como contaram ali, fizeram a sequência do 4, depois para o 7, depois para o 10, viram que ia somando sempre mais 3 e como estavam habituados, quando é o somatório sempre de 3 em 3 e eu ter-lhes dito que, normalmente, quando acontece isso é sempre uma sequência de $3n$ vão ao primeiro termo e veem (...) se está correto, ou pronto, se têm que tirar, se têm que acrescentar. (4.ª SC_9 jan 2014).

Este raciocínio evidencia que os alunos generalizam a regularidade encontrada com base num procedimento rotineiro e não pela análise da configuração das figuras que compõem a sequência. A estratégia usada pelos alunos é antecipada por Afonso:

"Ver qual era a diferença que vai entre o primeiro" (2.ª SC_24 out 2013). O perigo deste raciocínio está associado ao trabalho com sequências que não representem progressões aritméticas.

Na tarefa *Cubos com autocolantes*, o professor destaca o aparecimento de uma expressão para o termo geral da sequência que evidencia uma análise baseada no padrão que configura a imagem:

> Mas há um grupo que depois na parte da regra, achei muito interessante, porque aparece com n menos 2 já, vezes 4 mais 5 mais 5. O que é que eles fazem? (...) Eles metiam os cubos do meio e para eles isso era o n menos 2 porquê? Porque eles ao meterem o cubo do meio ficavam sem a face da esquerda e a face da direita, pronto. E como os das pontas era 5 faces, não era? Portanto, por isso é que aparece o mais 5 mais 5, o que ficava na ponta da esquerda e o que ficava na ponta da direita. (4.ª SC_9 jan 2014).

Afonso valoriza esta estratégia por apresentar um raciocínio que não é apoiado, simplesmente, na identificação da regularidade e escrita mecanizada dessa relação. Neste caso, há uma análise das componentes que compõem a figura e que são traduzidas numa expressão algébrica que mostra essas particularidades – estratégia do objeto inteiro.

A respeito dessa tarefa, o professor salienta, ainda, a emergência da estratégia algébrica concretizada em linguagem natural: "É a lei de formação, pronto [a regra é multiplicar por 4 o número de cubos e acrescentar mais 2]" (4.ª SC_9 jan 2014). O aparecimento desta resolução não surpreende o professor, por a ter antecipado: "A lei de formação é um bocadinho isso, não é? A linguagem" (3.ª SC_2 dez 2014).

Afonso destaca, também, o aparecimento da estratégia algébrica, formalizada na escrita de uma expressão para a função afim, na tarefa *Inscrição no ginásio*: "Eles põem mesmo na última questão a função afim, $y = kx + b$. Escrevem mesmo" (8.ª SC_8 mai 2014). Embora se refiram à expressão geral da função afim, os alunos concretizam os parâmetros com os valores respetivos da situação em causa.

Na tarefa *A cantina da escola*, os alunos recorrem à escrita de uma equação. Contudo, surgem equações distintas com base na designação da incógnita: "As estratégias seguidas diferiram na escolha para a identificação da incógnita" (9.ª SC_15 mai 2014). O professor salienta que nesta tarefa surge somente a estratégia algébrica, em virtude do momento em que a explora com os alunos: "Eu também estou numa fase diferente. Estou a terminar os problemas" (8.ª SC_7 mai 2014). Afonso mostra-se mais confortável em explorar as tarefas escolhidas e preparadas no grupo colaborativo, sempre após a introdução ao tema.

As estratégias envolvendo tentativa e erro ou a tabela, embora não tendo aparecido, foram antecipadas por Afonso, já que pensa que são estratégias privilegiadas pelos alunos com uma atitude menos positiva em relação à Matemática: "E os mais fracos se calhar sentem-se realizados, porque concretizaram uma coisa que, se calhar, em algumas situações, pensariam que nunca chegariam lá, pronto" (EF_jun 2014).

No acompanhamento que faz ao trabalho dos alunos, Afonso identifica a escrita de uma equação como a estratégia mais valorizada na tarefa *Eleição do delegado de turma*: "Fazem também por equação. A equação tem parêntesis, claro" (NC_13 fev 2014). Salienta, ainda, o aparecimento de uma equação que não envolve o uso de denominadores, em virtude da atribuição da incógnita: "O grupo que escolhe o x para o Lucas obtém uma equação sem denominadores" (NC_13 fev 2014). A atribuição da incógnita a diferentes candidatos não o surpreende, face ao que planifica para essa tarefa.

Afonso frisa que nas tarefas relacionadas com as Equações, os alunos apresentam sempre a resposta ao problema, independentemente da estratégia seguida – "Eles respondem" (8.ª SC_7 mai 2014) – e identificam sempre a incógnita: "Fiquei surpreendido, porque eles não se esqueceram de dizer o que era o x" (NC_21 jan 2014). Destaca esse facto pela positiva, por acreditar ser um aspeto no qual os alunos falham: "Uma coisa que eu noto que às vezes eles falham é na organização dos dados. Por muito que eu insista com eles para eles dizerem o que é o x, pronto, às vezes" (1.ª SC_1 out 2013). A estratégia algébrica é antecipada pelo professor em todas as tarefas, já que o seu objetivo é contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Em síntese, Afonso identifica diversas estratégias de resolução que os alunos podem usar e usam no seu trabalho com as tarefas propostas. Prevê que a estratégia por tentativa e erro, tabular e algébrica seja mobilizada pelos alunos em todas as tarefas. Em sala de aula, verifica que a estratégia que recorre à tentativa e erro é apresentada em todas as tarefas, com exceção da tarefa *A cantina da escola*. Justifica esse facto, em consequência do momento em que a tarefa surge na sua planificação, embora a tenha antecipado. Pensa que essa estratégia pode ser usada pelos alunos que têm mais dificuldades no trabalho em Matemática. As tentativas que os alunos fazem são, muitas vezes, organizadas em tabela. Nas tarefas *Palitos* e *Cubos com autocolantes*, essa estratégia é usada para determinar termos próximos e distantes das sequências dadas. A tabela surge, na tarefa *Inscrição no ginásio*, como uma ferramenta útil à organização da informação necessária à elaboração de uma representação gráfica e ao apoio à tomada fundamentada de decisões. A estratégia algébrica é a mais usada pelos alunos e é notória na escrita de expressões para o termo geral de uma dada sequência, da expressão da função afim e de equações. No caso das tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades, os alunos escrevem expressões que evidenciam uma manipulação algébrica distinta, já que há expressões que revelam compreensão e outras que recorrem a estratégias mais rotineiras, como a adição sucessiva da razão da progressão aritmética. Ainda nesse tema, a escrita da expressão traduz usos diferentes da simbologia algébrica, já que, por vezes, os alunos traduzem as relações em linguagem natural. Nas tarefas do âmbito das Equações, identifica a escrita de diversas equações para o mesmo problema, em consequência da interpretação que os alunos fazem do problema e da definição da incógnita. Neste trabalho de preparação da discussão coletiva, antes e durante a aula, o professor mobiliza o seu *conhecimento da Matemática* em articulação com o da *aprendizagem e dos alunos*, na identificação das estratégias usadas na resolução das diversas tarefas.

Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação

Para selecionar as estratégias que pretende que os alunos apresentem e a ordem das suas intervenções, Afonso apoia-se no trabalho que realiza de acompanhamento aos alunos: "Nas aulas é um bocadinho, por sei lá, às vezes, um desafio, uma tarefa (...) em grupo ou a pares, pronto, e depois vou recolher as informações e partir por aí para a discussão" (EI_set 2013).

Afonso reconhece esse momento como fundamental para registar todas as informações que o possam ajudar na tomada de decisões para promover uma discussão coletiva com qualidade. Antes da sua participação no grupo colaborativo, não pensava previamente nas estratégias de resolução que vai escolher para promover a discussão, nem na ordem pelas quais as vai fazer emergir na discussão. Em consequência, do trabalho realizado no grupo colaborativo, planifica previamente esse momento, em função das estratégias de resolução que prevê que os alunos possam apresentar. Baseia a seleção em estratégias de resolução diversificadas, garantindo a partilha da estratégia que recorre à tentativa e erro, ao uso de tabela e à álgebra. Essas estratégias são organizadas de modo a evidenciarem a transição da linguagem matemática informal para a formal, com o intuito de promover o desenvolvimento da generalização.

Em sala de aula, o professor identifica as *representações* usadas e os conceitos e procedimentos matemáticos mobilizados pelos alunos nas suas resoluções. As estratégias de resolução que recorrem a representações numéricas são as que escolhe para iniciar a partilha em coletivo, na tarefa *Palitos*: "Escrevem todos os termos da sequência até ao 76" (NC_4 dez 2013). Os alunos param a sequência numérica no 76, porque está relacionado com a questão em que solicita a verificação da pertença desse elemento à sequência: "Estes já (...) iam a pensar na segunda pergunta. O 76 tem a ver com a segunda pergunta, não é?" (4.ª SC_9 jan 2014). Os alunos que recorrem à tradução da sequência pictórica para a numérica não necessitam mobilizar conceitos matemáticos, para além da identificação da regularidade e da contagem.

Afonso avança, de seguida, para a seleção de estratégias algébricas, patentes na escrita do termo geral. Na apresentação do termo geral, identifica resoluções que evidenciam duas representações diferentes para a expressão da relação algébrica encontrada: "Eles têm: a regra é multiplicar por 3 o número da figura e depois acrescentar mais 1, depois põem entre parêntesis n vezes 3 mais 1" (4.ª SC_9 jan 2014). Os alunos mobilizam linguagem matemática informal em articulação com a formal, revelando segurança na passagem de uma para a outra.

Na interpretação de uma expressão dada para o termo geral da sequência, Afonso reconhece estratégias baseadas na aplicação de procedimentos algébricos: "Eles desembaraçam de parêntesis (...) concretiza com o 3 e depois põe à frente, figura 3" (4.ª SC_9 jan 2014). Justifica a simplificação algébrica que surge nesta situação com base nos conhecimentos adquiridos pelos alunos no trabalho com expressões numéricas. Destaca, ainda, a necessidade que os alunos sentem na verificação da simplificação feita, experimentando casos particulares. Na sua perspetiva, só este procedimento lhes mostra a correção do raciocínio desenvolvido: "Eles só percebem se primeiro concretizarem" (EI_set 2013). A generalização de uma relação é validada, pelos alunos, com casos particulares, após aplicação de conhecimentos numéricos ao trabalho com variáveis. A *linguagem matemática formal* é vincada nestas estratégias.

A representação algébrica é valorizada na tarefa *Cubos com autocolantes*, por ser a estratégia mais frequente: "A maior parte deles foi pelo termo geral, pronto" (4.ª SC_9 jan 2014). Contudo, as representações numérica (associada à tentativa e erro) e a tabular também surgem. A opção pela resolução que envolve *linguagem matemática* *formal* pode estar relacionada com o facto dos alunos já terem usado esta estratégia na tarefa *Palitos*.

A representação tabular é privilegiada na tarefa *Eleição do delegado de turma*, apesar de ser uma estratégia pouco frequente na turma: "É engraçado porque só um grupo faz por tabela. Quando antecipámos a tabela pensei que mais grupos fizessem por esse processo" (NC_21 jan 2014). Afonso opta por estratégias únicas na turma para iniciar a apresentação de resultados: "Eu acho que aqui o critério, não sei se foi, até a ver com aquelas que apareceram e ninguém mais tinha. De forma singular, não é?" (4.ª SC_9 jan 2014). Contudo, essas estratégias recorrem ao uso de *linguagem matemática informal*. Avança, de seguida, para as estratégias que recorrem a *linguagem matemática formal* – escrita de uma equação. Nesta tarefa, destaca o aparecimento de uma resolução distinta na turma, por ter sugerido uma interpretação diferente do enunciado da tarefa. Opta por deixar essa resolução para ser a última, por envolver um raciocínio diferente, embora recorrendo ao mesmo conceito matemático:

> Nós tivemos ali um critério (...) graduar dígamos assim a exposição, por aquela, ir primeiro aquela que aparecia mais vezes e, por exemplo, às vezes aparecia uma resolução isoladamente e essa ser por último. Acho que esse aspeto (...) foi importante. Porque, pronto, para já, porque lhes prende a atenção a primeira, como eles, a maior parte fez, pronto. Depois aquelas mais complicadas ajuda-os de alguma forma a ver as coisas, que no caso concreto, um problema pode ter várias resoluções, pronto. O raciocínio pode ser diferente mas no final. (EF_jun 2014).

Para Afonso, é importante iniciar pelas estratégias mais frequentes, de forma a manter os alunos envolvidos na partilha de ideias e só, posteriormente, progredir para as abordagens que mobilizam raciocínios desenvolvidos por um número reduzido de alunos. A análise de diversas formas de resolução permite comparar procedimentos, interpretar raciocínios e munir os alunos de outras ferramentas que podem ser utilizadas em situações futuras. Em consequência do trabalho que desenvolve no grupo colaborativo, o professor muda a sua atuação na escolha das estratégias a apresentar em primeiro lugar, privilegiando o critério da complexidade de raciocínios em detrimento da singularidade das estratégias de resolução.

A representação tabular também é reconhecida na tarefa *Inscrição no ginásio*, onde Afonso distingue algumas diferenças nos procedimentos adotados para o seu preenchimento: "A tabela não apresenta os meses todos seguidos e há alunos que têm que acrescentar os que faltam" (NC_12 mar 2014). Embora os alunos recorram à adição sucessiva da mensalidade, há os que o fazem mentalmente para determinar o valor a pagar para um certo mês e outros têm necessidade de registar os passos intermédios.

Nessa tarefa, Afonso aponta também a representação gráfica: “Eles fizeram aqui, os que fizeram de 45 em 45 fizeram assim umas coisas, atrapalharam-se aqui um bocado nos números, estás a ver? (...) Não chegavam para aquilo que lá estavam. Depois tiveram que ajustar” (8.ª SC_8 mai 2014). O professor, para além de identificar o procedimento adotado pelos alunos, reconhece, também, as dificuldades que apresentam na elaboração da representação gráfica. Os obstáculos nomeados estão relacionados com a escolha da escala, de modo a representar duas funções afins com declives distintos. Os alunos ao optarem por uma escala eficaz para um deles encontram entraves no outro. Identifica, também, a representação algébrica na tradução das relações entre o tempo de permanência em cada um dos ginásios e o valor a pagar: “Conseguem escrever a expressão da função afim para o ginásio *100 Calorias* e a da linear para o *Em Forma*” (NC_12 mar 2014).

Afonso privilegia as resoluções que recorrem às representações algébricas no trabalho com as equações, identificando claramente o conceito matemático subjacente: “Os alunos foram por equação” (NC_7 mai 2014). Destaca, contudo, que embora recorrendo à escrita de uma equação, os alunos analisam equações distintas, em função da incógnita escolhida, na tarefa *A cantina da escola*: “Como uns escolheram o x para a segunda e outros para a terça, obtêm equações diferentes. E depois foi interessante mostrar-lhes isso, que podem fazer de várias formas” (NC_7 mai 2014). Ainda nessa tarefa, salienta a escolha de uma estratégia iniciada por um grupo mas abandonada: “Consideraram menos um dia que foi a sexta-feira” (8.ª SC_8 mai 2014). Essa estratégia, embora recorrendo à escrita de uma equação, evidencia um tratamento diferente da informação apresentada no enunciado. Os alunos não identificam na equação cinco condições, correspondentes a cada dia da semana, mas quatro, em virtude de retirarem o número de almoços conhecidos ao total de almoços servidos pela cantina. O aparecimento dessa estratégia não surpreende o professor, já que tinha sido considerada no grupo colaborativo aquando da exploração da tarefa.

Com base nos trabalhos dos alunos, Afonso define uma ordem para as suas intervenções, promovendo a transição da linguagem matemática informal para a formal, com exceção da tarefa *A cantina da escola*, por surgir somente a representação algébrica. Antecipa essa opção por considerar ser fundamental para o envolvimento dos alunos no processo de generalização.

Em resumo, na planificação e no acompanhamento que faz ao trabalho dos alunos, Afonso identifica diversas estratégias de resolução, que são selecionadas em função das representações usadas e conceitos e procedimentos matemáticos mobilizados, com vista ao envolvimento dos alunos na passagem da linguagem matemática informal para a formal. A tentativa e erro é escolhida para iniciar a apresentação das estratégias usadas pelos alunos nas tarefas *Palitos*, *Eleição do delegado de turma* e *Inscrição no ginásio*, como previsto. É de salientar contudo, que nas duas últimas tarefas as tentativas são organizadas em tabela. O professor seleciona, de seguida e como planificado, as estratégias que recorrem a representações algébricas, formalizadas na escrita e análise da expressão do termo geral da sequência, da expressão da função afim e da equação. Na sequência que estabelece para as participações dos alunos privilegia a evolução da linguagem matemática informal para a formal, de acordo com o planificado.

Afonso identifica os conceitos e procedimentos usados pelos alunos nas suas resoluções e é com base nesse trabalho que opta por deixar para último a apresentação da estratégia que mobiliza um raciocínio único na turma, na tarefa *Eleição do delegado de turma*. Na tarefa *A cantina da escola*, Afonso identifica apenas a representação algébrica nas resoluções dos alunos, optando nesse caso por iniciar as apresentações pela estratégia mais frequente. É a representação algébrica que também valoriza na tarefa *Cubos com autocolantes*.

Na seleção e organização das estratégias a partilhar em coletivo, Afonso mobiliza o seu *conhecimento da Matemática* em articulação com o da *prática letiva* e da *aprendizagem e dos alunos*, quer na fase de planificação quer de preparação da discussão coletiva em sala de aula.

A dinamização da discussão coletiva

Componentes da discussão, discurso

Afonso inicia a *apresentação* das estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos durante o seu trabalho autónomo com o convite a um grupo específico de alunos, ao contrário do que costumava fazer anteriormente:

> Primeiro procuro saber se há algum voluntário e isso para mim é sempre, pronto. Quando não há voluntários, claro que, normalmente, vou sempre para aqueles que têm mais competências, ou que eu penso que são melhores alunos, pronto, abrindo sempre discussão. (EI_set 2013).

O professor altera a sua prática letiva na promoção de discussões coletivas, em especial na escolha dos alunos que iniciam a partilha, em consequência das aprendizagens realizadas com a sua participação no grupo colaborativo e de formação. Compreende que a escolha de voluntários ou de alunos com uma atitude mais positiva face à Matemática pode condicionar a discussão, tornando-a menos produtiva e invalidando a exposição de estratégias menos poderosas: "Se há uma que tem tudo. Então as outras não precisam" (4.ª SC_9 jan 2014). Com esse objetivo, inicia a *apresentação* das estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos, na tarefa *Palitos*, por uma estratégia que surge isoladamente na turma e que recorre à tentativa e erro, como mostra o diálogo entre o professor e um determinado aluno:

> **Professor Afonso:** Como é que justificaram se era possível construir uma figura com 76 palitos?
> **Aluno:** É possível porque.
> **Professor Afonso:** Fizeste a contagem, foi?
> **Aluno:** Fiz a contagem, se adicionarmos sempre 3 ao termo anterior acabamos por ver que dá 76. (Aula Sequências_4 dez 2013).

O professor avança, de seguida, para a estratégia mais frequente, como se observa no segmento do seu diálogo com o aluno Ricardo:

> **Professor Afonso:** Como é que fizeste ali os 76 palitos? (...)
> **Ricardo:** Fiz 76 menos 1 que vai dar 75 e depois dividi por 3.
> **Professor Afonso:** Fizeste a inversa, não foi?
> **Ricardo:** Depois confirmei e fiz 25 vezes 3 mais 1 que vai dar 76.
> **Professor Afonso:** Esse 25 é o quê, no fim de contas?
> **Ricardo:** É o n. É o número da figura.
> **Professor Afonso:** É o n. Ou seja, poderíamos dizer que os 76 palitos ia dar o 25.º termo. Certo? (Aula Sequências_4 dez 2013).

Afonso inicia a apresentação pelas estratégias menos poderosas algebricamente. A primeira não envolve o uso de linguagem matemática formal, enquanto a segunda mobiliza conhecimentos prévios dos alunos, nomeadamente o recurso às operações inversas. Os procedimentos mobilizados pelos alunos nessas duas estratégias são muito familiares, já que os usam no trabalho com sequências no ciclo de ensino anterior.

Durante a intervenção do aluno, o professor procura que este atribua significado ao valor encontrado, relacionando com a terminologia associada ao tópico Sequências e regularidades: ordem e termo. O professor negoceia uma interpretação para o valor encontrado, de acordo com o conceito matemático que está a ser explorado.

Para a discussão da tarefa *Eleição do delegado de turma*, Afonso também opta por iniciar a *apresentação* com um grupo que mostra uma estratégia de resolução única na turma. O grupo recorre à estratégia de tentativa e erro mas organizada numa tabela. Neste caso, a apresentação também tem início com uma estratégia que não recorre a linguagem algébrica, como fica evidente no discurso entre o professor e uma aluna:

> **Professor Afonso:** Mas explica aos teus colegas como é que pensaram.
> **Aluna:** Eu baseei-me na Francisca, pois é a partir dela que conseguimos saber o da Sandra.
> **Professor Afonso:** Mas essa tabela como é que surgiu? Como é que surgiu? Como é que te lembraste da tabela? Foi experimentar, não?
> **Aluna:** Foi a experimentar.
> **Professor Afonso:** Foste por tentativas?
> **Aluna:** Sim.
> **Professor Afonso:** Sim. Começaste ali pela Sandra, tens ali 10, depois a Francisca 5, 5. Mas o total é 20. E a turma tinha 30 alunos.
> **Aluna:** Depois experimentei a Francisca com 9 que depois dava 7 e a Sandra ficava com 14. O Lucas ficava com 7. Depois deu o resultado de 30.
> **Professor Afonso:** Mas tu foste ajustando os valores de modo a que tivesses aí um total de 30, certo? (Aula Equações_21 jan 2014).

Afonso presta um apoio muito próximo à aluna que está a apresentar a sua estratégia, levando-a a clarificar o raciocínio seguido na resolução. Contudo, dá-lhe pouca liberdade de expressão, oferecendo algumas justificações que podiam ser apresentadas pela própria aluna, nomeadamente a razão para ter abandonado a primeira tentativa. É também o professor que menciona o tipo de estratégia seguida pelo grupo de alunos que está a apresentar. Reconhece a sua dificuldade em articular a sua intervenção com a dos alunos: "Há sempre uma tendência de falar, eu falo por mim. (...) Volta meia volta, aquilo acho que é um bocadinho mais forte que eu" (4.ª SC_9 jan 2014). A vontade que tem em levar os alunos a clarificar as suas ideias e a atingir o planeado, condicionam, por vezes, a sua prática e originam situações em que a sua intervenção se sobrepõe à dos alunos: "O professor serve ali como um mediador e encaminha as coisas por onde quer não é? Pronto. E ajuda-os no sentido de clarificar" (EI_set 2013). Durante o acompanhamento à apresentação da aluna, Afonso *filtra* as ideias mais importantes, de modo a ficarem acessíveis a todos. A sua última intervenção reforça a razão para se ter abandonado a primeira tentativa e alerta para a verificação das condições presentes no enunciado da tarefa.

Na tarefa *A cantina da escola*, o professor inicia a *apresentação* das estratégias de resolução pela mais frequente, como mostra o diálogo que se segue entre o professor e uma certa aluna:

> **Professor Afonso:** Portanto, quem vai apresentar é quem considerou x na segunda-feira. (...)
> **Aluna:** Neste problema consideramos a segunda-feira o x. (...)
> **Professor Afonso:** O que é que o problema dizia? Que ao fim de uma semana numa cantina iam ser servidos quantos almoços?
> **Aluna:** 666.
> **Professor Afonso:** 666 almoços. Portanto, dizia na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, certo? (...) Vocês consideraram o x. (...) Então logo na terça-feira o que é que puseram? (Aula Equações_7 mai 2014).

Para focar a atenção dos alunos na estratégia mais frequente e que envolve linguagem algébrica, o professor informa a turma da particularidade dessa estratégia – designação da incógnita. Com esse esclarecimento, Afonso desperta o interesse dos alunos para comparar a sua estratégia de resolução com a que está a ser apresentada. Após a aluna começar a sua explicação, o professor interrompe de modo a recordar o problema. Com essa ação, pretende levar a aluna a explicar os monómios que figuram na sua equação, de acordo com as condições do problema e que sejam compreensíveis aos colegas que não usaram a mesma estratégia. Volta a direcionar a atenção da aluna para a atribuição da incógnita, com vista a salientar a importância de explicar cada uma das condições escritas em função da incógnita. O professor conduz o discurso da aluna em função desse propósito, como se observa no segmento de discussão seguinte:

> **Aluna:** x mais 100.
> **Professor Afonso:** x mais 100. Não há dúvidas, pois não? Depois continuam. Na quarta-feira, metade dos almoços servidos na terça.
> **Aluna:** Nós fizemos x mais 100 a dividir por 2.
> **Professor Afonso:** x mais 100 a dividir por 2, uma vez que o x mais 100 foi o número de almoços servidos na terça-feira, se era metade, x mais 100 a dividir por 2, certo? Depois continua, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda.
> **Aluna:** Fizemos x vezes 2.
> **Professor Afonso:** x vezes 2 que era $2x$, certo? E na sexta-feira serviram 156 almoços, está? Muito bem. (Aula Equações_7 mai 2014).

No decorrer da apresentação da estratégia de resolução, o professor repete as condições relativas ao dia da semana em análise e completa os contributos da aluna retomando a informação do enunciado, para que os restantes alunos não se distanciem do que está a ser partilhado. Aproveita também esse momento para reforçar o uso da linguagem algébrica.

O discurso do professor sofre um processo de estreitamento, já que inicia com o convite à apresentação de uma estratégia de resolução particular – *solicitação e discussão de muitas ideias* – mas rapidamente é direcionado para o acompanhamento da explicação da aluna, de acordo com as condições do enunciado e da designação da incógnita – *filtragem das ideias partilhadas*. Cumprido esse objetivo, Afonso volta a *solicitar e discutir novas ideias* que emergem da explicação da resolução da equação e da resposta ao problema, como evidencia o excerto que se segue entre o professor e uma determinada aluna:

> **Aluna:** Depois resolvemos a equação e deu 80.
> **Professor Afonso:** Como é que resolveram a equação? (...)
> **Aluna:** Sim, fizemos a multiplicação e metemos os mesmos denominadores.
> **Professor Afonso:** Sim, deu x igual.
> **Aluna:** 80. (...)
> **Professor Afonso:** E a minha resposta ia ser em função da segunda-feira. Portanto, na segunda-feira serviram 80 almoços, na terça-feira.
> **Aluna:** 80 mais 100, igual a 180.
> **Professor Afonso:** Muito bem.
> **Aluna:** Na quarta-feira 80 mais 100 a dividir por 2, 180 a dividir por 2 que dava 90.
> **Professor Afonso:** Certo.
> **Aluna:** Na quinta era 80 vezes 2 que dava 160 e na sexta era 156.
> **Professor Afonso:** Pronto e tiveram o cuidado de somar esses valores todos e dava os 666. (Aula Equações_7 mai 2014).

Afonso, ao solicitar a explicação para a resolução da equação, leva a aluna a apresentar os procedimentos a adotar na resolução de uma equação e respetiva ordem. Encaminha, ainda, a aluna a atribuir significado à solução da equação e a dar resposta ao problema. Valoriza um procedimento efetuado pelos alunos – verificação da solução encontrada. Com a sua atuação, leva os alunos a envolverem-se na negociação de um procedimento: conexão entre a solução da equação e a resposta ao problema.

A forma como o professor conduz o discurso denota que numa primeira fase não está muito preocupado com o seu conteúdo, convidando os alunos a partilharem a sua estratégia de resolução – *conteúdo matemático não filtrado* – para depois evoluir para a explicação particular dos monómios que figuram na equação escrita e dos procedimentos adotados na sua resolução – *conteúdo matemático filtrado*.

Para promover a *comparação e avaliação* de resoluções, Afonso recorre a diversas estratégias de ensino. Na tarefa *Eleição do delegado de turma*, move-se de uma estratégia de resolução que envolve linguagem matemática informal (tabela) para outra que recorre à linguagem matemática formal (equação), desafiando a aluna a relacionar as duas resoluções que apresenta, como mostra o diálogo seguinte entre o professor e a aluna:

> **Professor Afonso:** Então e depois como é que surgiu a outra parte?
> **Aluna:** Também baseei-me na Francisca e depois isto corresponde aos da, o $x + 5$ corresponde aos da Sandra.
> **Professor Afonso:** Porque ela dizia que tinha mais 5 votos do que a Francisca, certo?
> **Aluna:** Depois isto eram os da Francisca.
> **Professor Afonso:** Sim.
> **Aluna:** E este é os do Lucas, x mais 5 a dividir por 2.
> **Professor Afonso:** E porquê a dividir por 2? (...) Queres ver o enunciado?
> **Aluna:** Porque era metade dos votos da Sandra.
> **Professor Afonso:** Como a Sandra tinha x mais 5, não é? Portanto, fizeste x mais 5 sobre 2, certo?
> **Aluna:** Depois dava 30 o total.
> **Professor Afonso:** O total que era o número de alunos da turma, certo? (Aula Equações_21 jan 2014).

Com o convite que dirige à aluna, Afonso pretende que os alunos *comparem e avaliem* duas estratégias de resolução distintas, a partir da mesma interpretação da informação dada no enunciado. Durante a apresentação da aluna, vai *filtrando* os contributos mais importantes para que sejam reconhecidos como ideias válidas pelos outros e vai questionando, com vista a *avaliar* os raciocínios apresentados. Procura que, nessa avaliação, os alunos relacionem a linguagem matemática com as condições presentes no enunciado em linguagem natural. A primeira intervenção do professor tem como propósito *solicitar muitas ideias para serem discutidas* mas com o evoluir da apresentação da aluna, direciona o discurso para determinadas ideias que pretende que sejam clarificadas ou justificadas – *filtragem das ideias partilhadas*.

Visando a *comparação e avaliação* de mais estratégias de resolução, o professor introduz um novo grupo na discussão, levando uma aluna desse grupo a explicar a sua estratégia de resolução, como evidencia o diálogo que se segue:

Professor Afonso: Talvez, este grupo que fez uma maneira um bocadinho diferente, não foi? (...)
Aluna: Nós escolhemos a Sandra, em que x era o número de votos da Sandra.
Professor Afonso: x. A vossa colega anterior considerou o x como sendo o número de votos da Francisca, este grupo considerou o x o número de votos da Sandra, portanto o resultado vai ter que dar diferente, certo? (...)
Aluna: O x menos 5 é os votos da Francisca, porque dizia que a Francisca tinha menos 5 votos que a Sandra, ou que a Sandra tinha mais 5 votos que a Francisca.
Professor Afonso: OK, tudo bem.
Aluna: Depois fizemos mais um meio de x, porque o Lucas tinha um meio dos votos da Sandra.
Professor Afonso: Da Sandra.
Aluna: Fizemos mais x que é o número de votos que a Sandra tem.
Professor Afonso: Da Sandra. OK. Sim?
Aluna: 30 que é o número total de votos. (Aula Equações_21 jan 2014).

Para despertar o interesse dos alunos para a análise de uma outra estratégia de resolução e comparação com a sua ou com as já apresentadas, o professor começa por dar a indicação de que vai ser apresentada uma estratégia diferente, sem dar indicação da diferença. Para focar a atenção dos alunos no aspeto fundamental da resolução e que a distingue das anteriores, Afonso compara as designações das incógnitas e lança um novo convite que pretende voltar a chamar os alunos para a partilha de ideias, já que se podiam dispersar em virtude da conclusão que apresenta. Assim, incentiva os alunos a pensar sobre o resultado da equação. Com esta ação, pretende negociar com os alunos a compreensão que uma equação diferente conduz a um conjunto solução diferente. Durante a apresentação da aluna, o professor manifesta-se apenas para mostrar concordância com as justificações que vão sendo apresentadas, já que apresentam um nível de rigor e aprofundamento razoável – *avaliação*.

Na tarefa *A cantina da escola*, Afonso opta por dar indicação dos aspetos distintivos entre as resoluções para promover a *comparação* entre as já apresentadas e a que entra agora em análise:

Professor Afonso: Este grupo aqui considerou não o x como segunda-feira mas como terça, está bem? (...)
Anita: Então, nós primeiro começamos por apresentar os dados: que na terça-feira era mais 100 almoços que na segunda-feira, na quarta era metade dos almoços de terça-feira, na quinta o dobro dos almoços da segunda e na sexta 156 almoços que ia dar tudo 666.
Professor Afonso: Sim. (Aula Equações_7 mai 2014).

Ao mencionar que a incógnita designa um ente distinto de outro já apresentado, o professor tem como intenção promover a análise das implicações dessa alteração nas condições do problema. É de salientar que a aluna não inicia a sua apresentação retomando a ideia introduzida pelo professor, mas pelo recordar do enunciado do problema. Afonso valoriza esse contributo, na medida em que é fundamental à compreensão do que vai ser exposto, especialmente, quando o que está em causa é a análise de duas estratégias de resolução diferentes que recorrem a linguagem algébrica. Depois de recordar o objetivo da tarefa, a aluna Anita começa com a explicação da sua estratégia de resolução, reforçando a designação da incógnita, como se evidencia no seguinte diálogo:

> **Anita:** Começámos por indicar, aqui foi a, o x é a terça-feira.
> **Professor Afonso:** Sim. Consideraram então o x que era o número de almoços servidos na terça-feira.
> **Anita:** Depois aqui foi da segunda-feira que serviu mais 100 almoços que na segunda-feira.
> **Professor Afonso:** Sim, portanto, se na terça-feira foram servidos mais 100 almoços do que na segunda, quer dizer que na segunda, se eu considerei o x como o número de almoços servidos na terça feira, quer dizer que na segunda iria ser x mais, ou menos?
> **Anita:** Menos. (...) 100.
> **Professor Afonso:** 100. Para eu poder ter o mais 100 na terça feira. Muito bem.
> **Anita:** Depois na quarta-feira era metade dos almoços servidos. (...) Na terça.
> **Professor Afonso:** Portanto, daí o um meio de x. Correto.
> **Anita:** Na quinta-feira era o dobro dos almoços servidos na segunda: 2 entre parêntesis x menos 100, porque esta era a conta de terça que era o dobro mais 156 que era sexta que dá o total de 666. (Aula Equações_7 mai 2014).

Durante a explicação da aluna, Afonso vai salientando os contributos mais importantes – *filtragem* – de modo a que todos os considerem como elementos basilares à construção de uma cadeia de raciocínios que leve à compreensão da estratégia de resolução em análise. Aproveita também esse momento para completar as explicações da aluna, redizendo-as com vista a assegurar-se que todos compreendem o que está a ser partilhado. O professor avalia as explicações da aluna dando indicação da sua concordância. Essa atitude transmite confiança à aluna para progredir com a sua explicação.

Durante a apresentação da estratégia de resolução, Afonso *solicita ideias para a discussão* através do convite à partilha de uma estratégia para a qual indica claramente o que está em jogo. No acompanhamento que faz à partilha da explicação da resolução, *filtra as ideias* mais importantes, que merecem ser reforçadas para serem consideradas válidas pelos alunos que estão a seguir a exposição. De seguida, volta a *solicitar mais ideias para serem discutidas* com o convite à interpretação do conjunto solução da equação, como mostra o diálogo entre o professor e a aluna Anita:

> **Professor Afonso:** Resolveram a equação. (...) E deu x igual?
> **Anita:** A 180.
> **Professor Afonso:** Que era o número de almoços servidos...
> **Anita:** Na terça-feira. Então como na segunda era retirar 100, ficou 80. Na quarta-feira era metade dos almoços servidos na terça, 180 a dividir por 2 que deu 90. (...) Depois, 160 que deu na quinta, que era o dobro dos almoços da segunda-feira e 156 já indicava no problema. (...) Somámos tudo para ver se dava certo.
> **Professor Afonso:** Para verificarem. (Aula Equações_7 mai 2014).

Com a questão lançada, Afonso pretende direcionar a análise da resolução para a interpretação da solução da equação e a resposta ao problema, de acordo com as respetivas condições. Aproveita uma afirmação da aluna para clarificar a linguagem matemática dos alunos, introduzindo a terminologia correta. O discurso promovido evidencia o foco em ideias específicas, já que tem início com a partilha de uma estratégia de resolução – *conteúdo matemático não filtrado* – e avança para a repetição de afirmações apresentadas pelos alunos e a solicitação de explicações – *conteúdo matemático filtrado*.

Afonso promove, também, a *comparação* de estratégias a partir da indicação do conjunto solução da equação escrita na tarefa *Eleição do delegado de turma*:

> **Professor Afonso:** Atenção que pela equação deste grupo o x deu 9, pela equação deste o x deu 14 e por esta equação que está ali deu 7. Diz Tomé.
> **Tomé:** Posso? Então x é os votos do Lucas. O $2x$ é os votos da Sandra, porque o Lucas teve metade, a Sandra tem o dobro.
> **Professor Afonso:** Exatamente. O dobro.
> **Tomé:** E $2x$ menos 5 é os votos da Francisca, porque teve menos 5 do que da.
> **Professor Afonso:** Sandra. OK.
> **Tomé:** Que dava 30. Somei o x que deu $5x$. (Aula Equações_21 jan 2014).

Ao dar indicação aos alunos da obtenção de uma solução diferente para a equação do mesmo problema, Afonso pretende despertar o seu interesse para a justificação dessa ocorrência. Durante a explicação do aluno, limita-se a repetir as ideias mais importantes e fundamentais à compreensão dos aspetos mais delicados da sua resolução, como a ideia de dobro, por envolver um raciocínio inverso. Com essa atitude, e com a manifestação de concordância, transmite segurança ao aluno sublinhando a validade das justificações apresentadas – *avaliação*.

A *conclusão* da discussão serve para reforçar, na tarefa *Eleição do delegado de turma*, a possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um mesmo problema, como evidencia o excerto seguinte de um diálogo em que intervieram a investigadora e o professor:

> **Investigadora:** Reparem que obtiveram três equações diferentes. Esta última não tinha denominadores, enquanto as anteriores tinham.
> **Professor Afonso:** Exatamente. (...) Mais simples.
> **Investigadora:** Dependendo do que escolhiam. (Aula Equações_21 jan 2014).

Para além de alertar para a existência de diversas formas de se resolver um mesmo problema, o diálogo destaca as respetivas consequências.

O professor aproveita, também, a *conclusão* para relacionar a solução da equação com a resposta ao problema, na tarefa *A cantina da escola*:

> A resposta como viram é a mesma. Embora, a solução da equação seja outra, porque eles responderam em função da terça-feira, mas depois a resposta vai ser a mesma. O processo é que foi diferente, mas a resposta tem de ser a mesma. Certo? (Aula Equações_7 mai 2014).

O professor alerta os alunos para as consequências da alteração da escolha da incógnita na solução da equação, em virtude da modificação que ocorre nas condições do problema, reforçando que essa transformação não altera a resposta ao problema.

A *conclusão* das discussões em torno das tarefas relacionadas com as Equações permitem ao professor reforçar a importância de os alunos desenvolverem diversos tipos de estratégias para o mesmo problema:

> Depois, na discussão em grande grupo, chamar-lhes atenção para as diferenças que havia, em que apesar de muitas vezes o x ser diferente, dar um valor diferente, porque lhes atribuíram outra designação, exatamente, vamos ver que depois no fim ao dar a resposta ao problema e que iam bater exatamente no mesmo. E acho que aí o professor é fundamental para lhes fazer perceber as diferenças: dois caminhos ou três caminhos mas no final iam dar ao mesmo, o objetivo é dar resposta a uma pergunta, ao problema. No fim a resposta era a mesma. (EF_jun 2014).

Afonso valoriza bastante a possibilidade de os alunos apresentarem e explicarem diferentes tipos de estratégias de resolução e os relacionarem com a resposta ao problema. Com esse alerta, reforça a relação entre a solução de uma equação e a resposta ao problema, em função da definição da incógnita.

O professor usa a conclusão da discussão para relacionar representações. Em particular, na tarefa *Inscrição no ginásio*, procura que os alunos articulem a representação gráfica com a algébrica e atribuam significado aos parâmetros envolvidos na representação algébrica, em função do contexto da tarefa. Não descura a terminologia associada à representação algébrica, como fica evidente no diálogo que se segue entre diversos intervenientes: professor, alunos e investigadora:

> **Investigadora:** Ora reparem: há bocadinho alguém disse que tinha aqui uma função de proporcionalidade direta e qual das retas lhe corresponde?
> **Aluno:** Função linear.
> **Professor Afonso:** Sim. Qual das retas é que lhe corresponde [à função linear]? À preta ou à vermelha?
> **Vários:** À preta.
> **Professor Afonso:** Então na preta podes pôr y igual a...
> **Aluno:** kx. (...)
> **Professor Afonso:** (...) Quanto é que é o k?
> **Aluno:** Ah! 45.
> **Professor Afonso:** 45. $45x$. E a vermelha?
> **Aluno:** $y = 40x + 50$.
> **Professor Afonso:** Isso. (...)
> **Investigadora:** Agora reparem. Esta reta passa onde?
> **Aluno:** No zero. (...)
> **Investigadora:** Na origem. E a vermelha? Passa em que valor?
> **Aluna:** No 50.
> **Professor Afonso:** Por que é que começa no 50?
> **Aluno:** Porque é o valor da inscrição.
> **Professor Afonso:** Ou seja, eu quando ainda nem fiz exercício pago logo. (Aula Funções_12 mar 2014).

Durante a conclusão das principais ideias discutidas a propósito da tarefa *Inscrição no ginásio*, os alunos são chamados a estabelecerem relações entre a representação gráfica das funções afim e linear, com a respetiva expressão algébrica procurando interpretar e justificar as particularidades de cada tipo de função (a representação gráfica da função linear é uma reta que passa pela origem do referencial, enquanto que na função afim não passa pela origem), de acordo com as condições oferecidas por cada um dos ginásios. Os alunos interpretam e relacionam os conceitos de declive e ordenada na origem com os contextos apresentados. Neste caso particular, o discurso do professor centra-se na análise de ideias específicas, já que tem como objetivo fechar a discussão que se estabeleceu até ao momento – *conteúdo matemático* *filtrado*. O professor negoceia o significado de função afim e de função linear na sua representação algébrica e gráfica.

Em suma, o professor organiza a discussão coletiva em três momentos principais: *i)* apresentação; *ii)* comparação, avaliação e filtragem; e *iii)* conclusão (Figura 18).

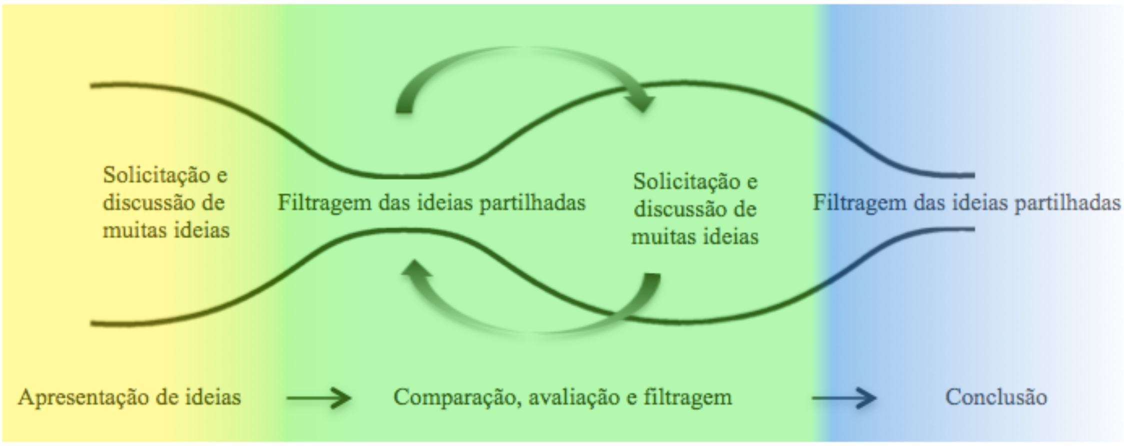


Figura 18: Organização da discussão coletiva do professor Afonso.

A *apresentação* tem início com o convite a alunos específicos, ao contrário do que fazia antes da sua participação no grupo colaborativo. As estratégias de resolução que privilegia numa primeira fase são as que recorrem a linguagem matemática informal, como as estratégias que envolvem tentativa e erro, podendo estas ser organizadas em tabelas. Evolui, posteriormente, para a apresentação de estratégias que envolvem linguagem matemática formal, como a algébrica (escrita de equações, da expressão do termo geral de uma sequência ou da expressão da função afim). Seguindo a linha de raciocínio que promove a transição da linguagem matemática informal para a formal, o professor ora começa por estratégias de resolução únicas na turma como pelas mais frequentes.

Afonso promove a *comparação* das estratégias de resolução referindo aspetos particulares das estratégias, como a designação da incógnita; afirmando explicitamente a existência de estratégias diferentes das já apresentadas ou até mencionando as caraterísticas distintivas entre as estratégias de resolução. *Avalia* as participações dos alunos através da repetição das afirmações mais relevantes e da manifestação de concordância com o que está a ser apresentado. *Filtra* as ideias mais importantes através do recordar do objetivo do problema, repetir afirmações, completar contributos e corrigir linguagem, com vista a ficarem acessíveis a todos os alunos e envolvê-los no que está a ser partilhado.

O professor usa a *conclusão* da discussão para reforçar a possibilidade de os alunos apresentarem diferentes estratégias de resolução para o mesmo problema, podendo envolver procedimentos distintos, relacionar a solução de uma equação com a resposta ao problema e estabelecer conexões entre diferentes tipos de representação, em particular algébrica e gráfica, com atribuição de significado aos parâmetros envolvidos.

O discurso de Afonso durante a condução da discussão sofre um processo de estreitamento de ideias, já que cumpre objetivos distintos. Durante a apresentação, pretende ter muitas ideias para serem discutidas – *solicitação e discussão de muitas ideias*. De seguida, encaminha o seu discurso para a análise de aspetos específicos – *filtragem das ideias partilhadas*. Com vista a esclarecer raciocínios, a solicitar explicações adicionais, avaliar procedimentos e a verificar a compreensão da estratégia de resolução apresentada, volta a solicitar mais ideias – *solicitação e discussão de muitas ideias*. O professor promove a negociação de significados matemáticos, a partir do envolvimento dos alunos na negociação de interpretações, de procedimentos e conceitos.

Afonso reconhece que tem alguma dificuldade na condução do discurso, em particular na articulação das suas intervenções com o tempo de espera que dá para a obtenção de reação por parte dos alunos. Justifica-se pela vontade que tem em alcançar o pretendido com a discussão.

A forma como Afonso conduz o discurso evidencia que a sua preocupação inicial se centra em ter muitas ideias para serem discutidas, levando os alunos a apresentarem as suas estratégias de resolução. Só, posteriormente, se importa com o conteúdo do discurso, filtrando os contributos dos alunos que permitem alcançar o propósito da discussão – *conteúdo matemático filtrado*. Na organização e condução da discussão o professor apoia-se, fundamentalmente, no seu *conhecimento da prática letiva* em articulação com o da *Matemática* e da *aprendizagem e dos alunos*.

Ações de ensino

Afonso recorre às *ações de elicitar* para levar os alunos a apresentar as suas estratégias de resolução. Para isso, dirige, sempre, o convite a alunos previamente selecionados. A formulação que impõe no convite é bastante diversa, por exemplo nas tarefas *Palitos* e *Inscrição no ginásio*, opta, simplesmente, por dar indicação do aluno a apresentar: "Qual é que é o grupo? Celso e Ricardo. Vá Ricardo" (Aula Sequências_4 dez 2013); "Então vá. Anita" (Aula Funções_12 mar 2014), talvez pela própria estruturação da tarefa (organizada em várias questões, com um nível de complexidade crescente) e também pelo facto de se apoiar na projeção das estratégias dos alunos, previamente selecionadas e fotografadas. Nas tarefas *Eleição do delegado de turma* e *Cubos com autocolantes*, o convite que dirige aos alunos sugere a explicação dos seus raciocínios: "Mas explica aos teus colegas como é que pensaram" (Aula Equações_21 jan 2014); "Como é que chegaram à dos cubos?" (Aula Sequências_4 dez 2013), possivelmente pelo facto de a tarefa não ser muito estruturada. Ainda nas tarefas *Eleição do delegado de turma* e *Cubos com autocolantes*, usa outra estratégia de ensino para promover a apresentação de resoluções: "Talvez, este grupo que fez uma maneira um bocadinho diferente, não foi?"; "Atenção que pela equação deste grupo o x deu 9, pela equação deste o x deu 14 e por esta equação que está ali deu 7. Diz Tomé" (Aula Equações_21 jan 2014); "Explicaram de uma maneira diferente. Quem é que consegue?" (Aula Sequências_4 dez 2013). Com essa opção, para além de convidar os alunos a mostrar a sua estratégia de resolução, alerta a turma para a existência de estratégias distintas das já partilhadas – *ações de informar*. A mesma atuação é usada na tarefa *A cantina da escola*: "Quem vai apresentar é quem considerou x na segunda-feira"; "Este grupo aqui considerou não o x como segunda-feira mas como terça, está bem?" (Aula Equações _7 mai 2014). Alerta a turma para as características particulares da resolução que vai ser exibida, despertando o interesse dos alunos para a sua análise e para a comparação com outras já apresentadas – *ações de informar*.

Afonso recorre às *ações de desafiar* para levar os alunos a explicar uma generalização efetuada, na tarefa *Cubos com autocolantes*, como evidencia o diálogo que mantém com a aluna Iara:

> **Iara**: Nós para descobrirmos isto fizemos o termo geral. Os 3 cubos deu 14 autocolantes.
> **Professor Afonso**: Os 3 cubos? (...)
> **Iara**: Nos 4 cubos deram-me 18 autocolantes, isto é a mesma coisa que somar sempre mais 4. Os 10 cubos era 42 autocolantes e 52 era 210. Para, porque nós determinámos o termo geral que era $4n$ mais 2.
> **Professor Afonso**: Porquê? Como, como? Como é que chegaste à conclusão que era $4n$? Olha para aqui, este ia ter quantos?
> **Iara**: 6.
> **Professor Afonso**: 6 autocolantes.

Iara: Ia ter 10, porque estes dois ficaram.
Professor Afonso: Exatamente. E este ia ter quantos? Tu falaste nos 3 cubos.
Iara: 14, porque retirámos 2 daqui, um daqui e um daqui.
Professor Afonso: Mas o que eu percebi é que são 4 em 4, mas por que é que é mais 2?
Iara: Porque nós aqui só pusemos deste lado 4, metemos mais 2 que é deste e daquele. (Aula Sequências_4 dez 2013).

O professor usa o questionamento para convidar a aluna a explicar como chegou à expressão do termo geral, mas, em simultâneo, recorre às *ações de apoiar* para focar a atenção da aluna numa possível justificação – "Olha para aqui, este ia ter quantos? E este? E este ia ter quantos? Tu falaste nos 3 cubos". Ao oferecer uma ideia para a aluna analisar – *ação de apoiar* – o professor conduz a aluna para o seu raciocínio e não para o dela, já que interpreta a expressão da aluna recorrendo a um raciocínio recursivo – "Mas o que eu percebi é que são 4 em 4" – e a aluna parece focar-se no número de autocolantes que ficam visíveis em cada face, acrescentando mais dois autocolantes relativos aos cubos dos extremos.

O encaminhamento que Afonso dá à exposição da explicação da aluna, leva outros alunos a oferecerem outras interpretações para a mesma expressão do termo geral, como é o caso de Rui:

Rui: Eu sei uma regra diferente.
Professor Afonso: Explicaram de uma maneira diferente. Quem é que consegue? Podes sentar, obrigado. Esperem aí. Rui.
Rui: 4 vezes o número da figura que é 1, dá 4, para chegar a 6 ainda faltam 2.
Professor Afonso: Para chegar a 6, que é o quê? O primeiro termo, certo?
Rui: Sim. (Aula Sequências_4 dez 2013).

As *ações de desafiar* que Afonso usa com o grupo anterior parecem ter efeitos positivos, já que outros alunos introduzem ideias novas na discussão, avançando com outras interpretações para a expressão do termo geral apresentado. O professor continua a usar as mesmas ações para promover o aparecimento de outras explicações: "Quem é que consegue?" Essa provocação leva o aluno Rui a sugerir a interpretação que Afonso procura induzir a Iara.

Os alunos continuam a oferecer outras interpretações para a mesma expressão do termo geral, em consequência das *ações de desafiar* usadas por Afonso, como mostra o seguinte segmento de discussão:

Aluno: Nós fizemos de outra maneira. (...) Também pensámos $4n$ mais 2. Então é assim, aquele que tem 3 cubos, os cubos das pontas tem 5 autocolantes, então como existem 2 cubos nas pontas, cada um tem 5, 5 mais 5, 10 mais os 4 do meio, 14.
Professor Afonso: Este vai ter 5, este vai ter 5, mais 4, 14. Muito bem.
Aluno: Os cubos do meio têm sempre 4 e os das pontas tem sempre 5.
Professor Afonso: Muito bem, sim senhor.
Investigadora: Então, como nós traduzimos a tua ideia numa regra? (...)
Filipe: Sim. Para calcularmos a maneira do Rodrigo, com 4 cubos, os das pontas eram 5, 5 cubos depois no meio acrescentávamos 2 vezes 4.
Investigadora: 2 vezes 4. E se tivéssemos a figura 7, como é que ficava? (...)
Aluno: Na 7 ficavam 4. 5, ficavam 5 cubos. 5 mais 5 mais 4 vezes 5.
Investigadora: Então e se fosse a figura n? (...) Quantos cubinhos vão ficar sempre no meio?
Aluno: n menos 2.
Investigadora: n menos 2, por que é que é n menos 2? (...)
Aluno: Ah, já sei, já sei. É o número. Numa figura de 4 cubos (desenha 4 cubos), é o número da figura que é 4 menos 2, estes das pontas.
Investigadora: Menos 2 das pontas. Então aquele n menos 2 dá os cubinhos.
Aluno: Dá os cubos do meio.
Investigadora: E esses cubos do meio quantos autocolantes têm?
Aluno: 4. Então é 5 mais 5 mais 4 mais 4.
Investigadora: 5 mais 5 são os autocolantes de onde?
Aluno: Das pontas.
Investigadora: Das pontas. Então põe lá. 5 mais 5 são das pontas. E agora no meio quantos cubos lá temos?
Aluno: 2.
Investigadora: E se fosse na figura n? (...) Então os n menos 2 cubos do meio temos que multiplicar por quantos autocolantes?
Aluno: Por 4.
Investigadora: E depois juntar mais quantos das pontas?
Aluno: 5.
Professor Afonso: Mais?
Aluno: 5. (Aula Sequências_4 dez 2013).

A explicação apresentada pelo aluno sugere a formulação de uma nova expressão para o termo geral da sequência em análise, distinta da mais frequente. Através de *ações de desafiar* os alunos são convidados a estabelecer essa generalização: "Então, como nós traduzimos a tua ideia numa regra? Então e se fosse a figura n?" É evidente a necessidade que os alunos sentem em trabalhar numa primeira fase com casos particulares. Durante o estabelecimento da generalização pedida as *ações de apoiar* são fundamentais na medida em que orientam o aluno no raciocínio que está a seguir, através do questionamento – "Quantos cubinhos vão ficar sempre no meio? E esses cubos do meio quantos autocolantes têm? 5 mais 5 são os autocolantes de onde? E agora no meio quantos cubos lá temos? Então os n menos 2 cubos do meio temos que multiplicar por quantos autocolantes? E depois juntar mais quantos das pontas?" – e da introdução de afirmações para completar – "Então aquele n menos 2 dá os cubinhos". Usa as *ações de apoiar*, ainda, para focar a atenção da turma nos aspetos mais importantes – "Menos 2 das pontas. Das pontas". As *ações de desafiar* são, também, usadas para solicitar a justificação de afirmações feitas: "por que é que é n menos 2?".

O professor vê no questionamento uma forma eficaz de compreender os raciocínios dos alunos: "Também é importante até para ver de facto se quem está apresentar, a forma como eles estão a pensar se está correta, se não para de alguma forma, para os encaminhar um bocadinho nesse aspeto" (EF_jun 2014).

O envolvimento dos alunos que se faz sentir na discussão desta tarefa e, em particular, na análise da expressão do termo geral, é um aspeto muito valorizado pelo professor: "Quando as coisas começam a ser discutidas a sério, eu depois reparei que há sempre um envolvimento e até uma ou outra achega da parte dos grupos" (EF_jun 2014). A negociação de significados que o professor promove, em conjunto com a investigadora, decorre do desafio lançado para a explicação da expressão do termo geral estabelecida para a sequência apresentada.

Na tarefa *Inscrição no ginásio*, as *ações de desafiar* de Afonso servem para incitar os alunos a encontrarem justificações mais poderosas do ponto de vista algébrico e que relacionem as variáveis em estudo, como mostra o diálogo seguinte:

> **Investigadora:** A Anita disse que fez, para descobrir quanto pagaria ao fim de 4 meses adicionou mais 40 euros ao valor pago até aos 3 meses. Será que nós poderíamos preencher aquilo de uma outra forma? Vamos imaginar que nós não sabíamos quanto tínhamos pago ao fim dos 3 meses. Como é que nós descobríamos aquele valor?
> **Aluno:** 210 menos 50.
> **Investigadora:** Porquê, 210 menos 50?
> **Aluno:** Porque é o 210 menos a inscrição.
> **Investigadora:** E depois o que farias ao que te dava, que era 160?
> **Aluno:** Dividia-se pelos 4 meses.
> **Professor Afonso:** Pelos 4 meses, muito bem.
> **Investigadora:** Mas tu ainda não sabias que eram 4 meses.
> **Filipe:** Então 4 vezes 4, 16.
> **Investigadora:** O que é que nós conhecemos?
> **Aluno:** Dividimos por 40. (...)
> **Investigadora:** Que era o valor de...
> **Aluno:** Mensalidade. (...)
> **Professor Afonso:** Isso é que ia dar os 4, não é? (Aula Funções_12 mar 2014).

As *ações de desafiar,* sob a forma de questionamento, permitem aos alunos justificar afirmações feitas e encontrar razões válidas para a sua argumentação, relacionando as variáveis número de meses, valor da inscrição e valor da mensalidade.

As *ações de apoiar* são usadas por Afonso para validar as respostas dadas e mostrar à turma a razoabilidade dos raciocínios desenvolvidos. A conjugação destas ações leva os alunos a percorrer um caminho que pode ser usado noutras situações e envolvê-los, de modo informal, na resolução de equações do primeiro grau recorrendo somente às operações aritméticas inversas, a partir do estabelecimento informal da expressão da função afim subjacente à situação dada. Essas ações permitem, também, levá-lo a auxiliar os alunos na generalização da expressão da função afim:

Filipe: Então na pergunta 4 dissemos assim: n que é o número de meses vezes 45 que é o *Em Forma*.
Professor Afonso: Sim.
Filipe: E o *100 Calorias* foi 40 vezes o número de meses, então foi n vezes 40 mais 50.
Professor Afonso: Sim. (...)
Jaime: Ó stôr, a primeira é a mesma coisa que ter y igual a kx e a segunda é a mesma coisa que ter y igual a kx mais b.
Professor Afonso: Esta é igual a y igual.
Jaime: kx.
Professor Afonso: kx e quanto é que é o k?
Jaime: É 45.
Professor Afonso: 45. $45x$, é exatamente o mesmo. E esta?
Jaime: Ali é y igual a kx mais b.
Professor Afonso: Mais b.
Jaime: Que é 40 mais 50. $40x$.
Professor Afonso: $40x$ mais 50. Está? (Aula Funções_12 mar 2014).

Afonso usa as *ações de apoiar* para dar indicação aos alunos da validade dos raciocínios oferecidos e para incentivar os alunos a avançarem com a exposição das generalizações estabelecidas ("Esta é igual a y igual"; "E esta?"). Recorre, indiretamente, às *ações de desafiar* para levar os alunos a interpretarem os diferentes parâmetros que figuram na expressão da função afim, de acordo com as condições do enunciado da tarefa, como se pode observar no diálogo em que também intervém a investigadora e o aluno Jaime:

Investigadora: Então o que representa o 45?
Jaime: 45 representa o que a gente vai pagando ao longo dos meses.
Professor Afonso: Ao longo de cada mês.

Jaime: Sim, ao longo de cada mês.
Investigadora: E na segunda expressão o 40?
Jaime: O 40 é a mensalidade.
Investigadora: E os 50?
Jaime: É da inscrição.
Investigadora: E porque é que a anterior não tem?
Jaime: Porque a inscrição é gratuita. (Aula Funções_12 mar 2014).

Através das *ações de desafiar* e de *apoiar* (corrigindo afirmações incorretas), Afonso leva os alunos a relacionar os diversos parâmetros da expressão da função afim com os correspondentes valores da inscrição e da mensalidade, avançando com justificações que caraterizam a função linear enquanto caso particular da função afim.

O professor usa as *ações de desafiar* para levar os alunos a tirar conclusões, apoiando-se nas representações gráficas que o aluno Filipe elabora com a sua ajuda:

Professor Afonso: O que é que se pode aí observar nesse gráfico? (...) O que é que tu olhando para ali para as retas o que é que se pode concluir?
Aluno: Que os valores vão ficando cada vez mais próximos.
Professor Afonso: Mais próximos. Portanto, se calhar se houvesse aqui no gráfico, se chegássemos aqui ao décimo mês, o que é que ia acontecer às retas?
Filipe: Tocavam-se. (...)
Professor Afonso: Tocavam-se, exatamente. (...) Então, voltando aqui para o gráfico, tu consegues continuar o gráfico? Aqui é: 7, 8, 9, 10, 11, 12, por exemplo. Pronto. Consegues continuar mais ou menos o gráfico? Aproximado. Tens aí a vermelha e tens aí a preta. (...) Como é que sabes que eles se cruzam aqui? (impercetível. Professor ajuda o aluno a construir o gráfico) Aqui há de ser 300, aqui há de ser 400. (...) Estão a ver qual era o comportamento do gráfico? Até ao décimo mês, e agora vamos prolongar outra vez mais. Exatamente. Está bem? Certo. Percebido? (Aula Funções_12 mar 2014).

Afonso recorre a *ações de desafiar* para oferecer uma ideia para os alunos interpretarem e para, a partir dela, levá-los a procurar uma outra justificação para os raciocínios apresentados. Isto é, procura que os alunos generalizem as relações estabelecidas, a partir da representação tabular, agora para a representação gráfica: ao fim do décimo mês o valor a pagar em cada um dos ginásios é o mesmo e a partir do décimo mês a tendência de pagamento inverte-se.

Na tarefa *A cantina da escola*, Afonso volta a recorrer, indiretamente, às *ações de desafiar* para oferecer um raciocínio para os alunos interpretarem, como mostra o excerto que se segue:

Investigadora: O Filipe começou por escrever esta equação, mas depois teve muita preguiça em resolvê-la. Ele escreveu assim: x menos 100, mais x, mais x sobre 2, mais 2 abrir parêntesis x menos 100 igual a 510.
Aluno: Hã?
Investigadora: Será que ele podia escrever esta equação?
Aluno: Sim, pode.
Investigadora: Então agora tens que me explicar por que é que ele pode. Será que se resolvêssemos esta equação íamos chegar à mesma resposta?
Aluno: Sim.
Professor Afonso: Aquele x menos 100, o que é? Significa o quê? Segunda, terça, quarta, quinta ou sexta?
Alunos: Segunda.
Professor Afonso: O da segunda-feira, muito bem. Então considerou o x terça. Certo? E depois a seguir o que é que vem, x sobre 2?
Aluno: É quarta. (...)
Professor Afonso: Este seria o de quarta-feira. O que é que diz na quarta-feira?
Aluno: Metade dos almoços servidos na terça.
Professor Afonso: Metade dos almoços servidos na terça. Está certo, não está? Tal como a vossa colega fez aqui: x mais x menos 100 mais um meio de x. Ter um meio de x ou ter x sobre 2 é a mesma coisa. Quinta-feira? Quinta-feira? Como é que está lá? 2, x menos 100, não está? Só que falta lá o 156. Mas o total também não está lá 666.
Filipe: Já retirei o total todo de almoços.
Professor Afonso: Já retiraste o quê?
Filipe: Já retirei a sexta-feira.
Professor Afonso: Isto vem do 666 menos.
Alunos: Menos 156. (...)
Professor Afonso: Isto era a mesma coisa que eu ter aqui mais 156.
Aluno: Igual a 666.
Professor Afonso: E aqui ter 666 menos 156. Estão a ver? Portanto, passei para o lado de lá ficou menos e ficou o valor que ele tinha, 510. (...) A equação tem que dar a mesma solução desta, tem que ser em função de quê? De terça-feira, certo? O x ia dar 180, está bem? Está percebido? (Aula Equações_7 mai 2017).

O professor aproveita a ideia introduzida pela investigadora (informa os alunos da existência de uma outra estratégia de resolução) – *ações de informar* – para a explorar com os alunos. Nesse sentido, recorre às *ações de apoiar* para os ajudar a avançar na interpretação da equação apresentada, introduzindo uma ideia para interpretarem: "Aquele x menos 100, o que é? Significa o quê?" As suas *ações de apoiar* passam também por repetir contributos dos alunos, dando assim indicação à turma da validade dessas afirmações. Apoia-se em *ações de desafiar* para solicitar esclarecimentos, com vista a que que fiquem acessíveis a todos.

Afonso recorre, ainda, a *ações de informar* para alertar os alunos para as semelhanças entre a estratégia que está a ser apresentada e as outras já analisadas anteriormente e para esclarecer diferentes representações para o mesmo monómio: "Ter um meio de x ou ter x sobre 2 é a mesma coisa". Usa, também, estas ações para ajudar os alunos a interpretar passos da resolução da equação: "Portanto, passei para o lado de lá ficou menos e ficou o valor que ele tinha, 510". A negociação de significados ganha relevo neste episódio de discussão através da análise e interpretação que se estabelece em torno de uma determinada estratégia de resolução.

O professor apoia-se nas *ações de desafiar* para incitar os alunos a relacionar a solução da equação com a resposta ao problema na tarefa *Eleição do delegado de turma*, como se observa no diálogo que estabelece com uma aluna:

> **Aluna:** Depois fiz o cálculo. (...) E o que me deu foi 9.
> **Professor Afonso:** 9, sim.
> **Aluna:** Que eram os votos que a Francisca recebeu, depois fiz o resto.
> **Professor Afonso:** Como a pergunta era quem ganhou as eleições, não é? Portanto, o que é que foste fazer? (...) A Francisca era 9, que era o que tinha dado, a Sandra.
> **Aluna:** A Sandra.
> **Professor Afonso:** 9 mais 5 porque. Porquê?
> **Aluna:** Era x mais 5.
> **Professor Afonso:** Porque ela tinha recebido mais 5 votos do que a Francisca.
> **Aluna:** Que dava 14, depois o Lucas que era 14 a dividir por 2.
> **Professor Afonso:** Metade dos da Sandra que era 14 a dividir por 2. Certo. (Aula Equações_7 mai 2014).

Afonso procura que a aluna justifique os raciocínios que apresenta à medida que vai relacionando a resposta ao problema com a solução encontrada para a equação. Em simultâneo, recorre às *ações de apoiar* para a ajudar a avançar com as suas explicações – "A Francisca era 9, que era o que tinha dado, a Sandra" – e para oferecer outras interpretações para os argumentos apresentados, relacionando com as condições do enunciado – "Porque ela tinha recebido mais 5 votos do que a Francisca; Metade dos da Sandra que era 14 a dividir por 2" – ao mesmo tempo que repete argumentos.

Em síntese, o professor apoia-se em quatro tipos principais de ações de ensino (Quadro 6) com objetivos próprios, para envolver os alunos em discussões coletivas produtivas: *elicitar*; *apoiar*; *informar*; e *desafiar*. Para Afonso, as ações de *elicitar* servem para convidar alunos específicos a apresentarem as suas estratégias de resolução. No convite que dirige aos alunos usa estratégias de ensino diferentes, em função das tarefas exploradas pelos alunos. O professor tanto opta por indicar somente o grupo a apresentar, assim como acompanha o convite com o pedido de explicação para os raciocínios desenvolvidos. O professor encontra nas *ações de apoiar* uma forma de concentrar a atenção dos alunos em possíveis justificações, oferecer interpretações para os raciocínios apresentados, validar respostas e repetir contributos dos alunos. Apoia-se nas *ações de informar* para despertar a curiosidade dos alunos para a análise de estratégias, soluções e explicações diferentes das suas ou das já apresentadas, assim como para a comparação de estratégias semelhantes. Usa as *ações de desafiar* para levar os alunos a justificar raciocínios ou avançar com justificações mais poderosas algebricamente, formular e explicar generalizações, solicitar explicações, argumentar, interpretar raciocínios, estabelecer conclusões e relacionar representações matemáticas. Na realização das suas ações o professor apoia-se no seu *conhecimento da prática letiva* em articulação com o da *aprendizagem e dos alunos* e da *Matemática*.

Quadro 6

Ações de ensino do professor Afonso.

Ações do professor	**Objetivos** (levar o aluno a…)
ações de elicitar	• Expor e explicar os passos de resolução
ações de apoiar	• Focar a atenção numa possível justificação • Interpretar raciocínios • Compreender o sentido do seu pensamento através da indicação da validade da resposta, da repetição de contributos ou da apresentação de uma interpretação
ações de informar	• Reconhecer estratégias de resolução distintas/ semelhantes; explicações diferentes
ações de desafiar	• Justificar raciocínios • Avançar com interpretações • Formular e explicar generalizações • Avançar com justificações mais poderosas algebricamente • Argumentar • Estabelecer conclusões • Relacionar representações matemáticas

Síntese final

Afonso é um professor que conta com uma abrangente experiência de ensino dada pelos seus vinte e cinco anos de serviço. Tal como reconhece, tem investido pouco na sua formação, encontrando na participação neste estudo uma oportunidade de aprender e enriquecer a sua prática letiva, fundamentalmente, na promoção de discussões coletivas em Álgebra e no aprofundamento deste tema matemático.

Na preparação da discussão coletiva, Afonso começa por escolher tarefas diversificadas quanto à natureza e desafio, apostando em problemas, investigações e explorações. Privilegia tarefas que surgem em contextos variados e que mobilizam diferentes tipos de representação. Após a escolha cuidada das tarefas, define o propósito que pretende atingir com a discussão coletiva, identificando os conceitos e objetivos matemáticos.

Afonso prevê estratégias que recorrem à tentativa e erro, ao uso de tabelas e à álgebra para o trabalho dos alunos com as diferentes tarefas. Face às estratégias antecipadas e identificadas no trabalho dos alunos, o professor seleciona as que quer levar à discussão atendendo às representações usadas, conceitos e procedimentos mobilizados. Seleciona as representações numérica (associada à tentativa e erro) ou tabular para iniciar a apresentação, evoluindo, de seguida, para as que usam linguagem algébrica.

Na sala de aula, Afonso organiza a discussão em três grandes momentos: *i)* apresentação; *ii)* comparação, avaliação e filtragem e *iii)* conclusão. Para iniciar a apresentação das estratégias de resolução convida alunos específicos, privilegiando as resoluções menos poderosas do ponto de vista algébrico (tentativa e erro e tabela). Avança, seguidamente, para as resoluções que recorrem a linguagem algébrica, como a escrita de equações, expressões para o termo geral de uma sequência e da função afim. Leva os alunos a compararem as estratégias através das seguintes atuações: destacar particularidades das estratégias, como a atribuição da incógnita; e alertar para a partilha de estratégias diferentes das já apresentadas ou até mencionar as diferenças entre as resoluções. Promove a avaliação das estratégias de resolução através da repetição de afirmações feitas pelos alunos e da manifestação de concordância com o que foi exposto. Para envolver os alunos na partilha de ideias e para que as considerem matematicamente válidas filtra as mais importantes, repetindo contributos dos alunos, completando afirmações, corrigindo linguagem e recordando o objetivo da discussão. Usa a conclusão, para sintetizar aspetos importantes como o mesmo problema admitir diferentes abordagens, relacionar conceitos e estabelecer conexões entre representações.

O discurso de Afonso sofre ao longo da dinamização da discussão um processo de estreitamento de ideias, já que numa primeira fase o seu objetivo é ter muitas ideias para serem discutidas e portanto o que está em jogo não é tanto o conteúdo matemático dessas ideias. De seguida, o foco do professor muda para o conteúdo matemático do que está a ser partilhado sendo então levado a filtrar as mais relevantes e a solicitar mais ideias, com vista à clarificação do que está em análise, à justificação, à argumentação ou à negociação de significados e procedimentos.

Para envolver os alunos em discussão, Afonso apoia-se num conjunto de ações de ensino com propósitos distintos: ações de elicitar, ações de apoiar, ações de informar e ações de desafiar. O professor recorre às primeiras ações para convidar os alunos a apresentarem as suas estratégias de resolução, dando início à discussão. Apoia-se nas restantes para continuar a discussão. Em particular, as ações de apoiar são usadas pelo professor para focar a atenção dos alunos em possíveis justificações, oferecer interpretações para raciocínios desenvolvidos, validar respostas e repetir contributos. As de informar servem para levar os alunos a analisar e comparar estratégias e explicações diferentes. O professor Afonso usa as ações de desafiar para levar os alunos a justificar raciocínios, argumentar, formular e explicar generalizações, estabelecer conclusões e relacionar representações.

A atuação de Afonso no momento da preparação e da dinamização da discussão coletiva é fundamentada no seu conhecimento didático nas suas distintas vertentes. O seu conhecimento da prática letiva é mobilizado, em todo o processo, em articulação com o da Matemática na definição do propósito da discussão, na antecipação e identificação das estratégias de resolução, na seleção dessas estratégias e na forma como promove a discussão. O conhecimento do currículo também é convocado, especialmente, na escolha das tarefas a apresentar aos alunos. O conhecimento dos alunos e da aprendizagem é determinante na escolha das tarefas, na definição de possíveis estratégias de resolução a usar pelos alunos, na seleção e organização das estratégias a partilhar em coletivo e na forma como o professor organiza e promove a discussão coletiva, em particular como envolve os alunos em discussão.

CAPÍTULO X

Discussão coletiva: a prática e o conhecimento dos professores

Neste capítulo, organizado em quatro secções, olho transversalmente para os três casos que compõem o estudo, segundo as respetivas questões orientadoras, depois de recordar brevemente quem são os três professores. Na primeira seção apresento breves elementos caracterizadores dos professores e nas restantes três procuro dar uma visão integradora das dimensões e temas usados na análise de resultados de cada um dos casos: Recordando os professores, Preparação da discussão coletiva, Dinamização da discussão coletiva e Conhecimento didático mobilizado e emergente das discussões coletivas.

Recordando os professores

Professora Ana. Ana é a professora com menos anos de experiência de ensino dos três professores que constituem os casos do estudo, embora conte já com mais de duas décadas de docência. É uma professora que gosta de experimentar novas metodologias de ensino, não se intimidando com a possibilidade de sair da sua zona de conforto. Encontra na participação em projetos de investigação e curriculares essa oportunidade para se desenvolver profissionalmente. O seu envolvimento em projetos de investigação começa pouco tempo depois de terminar a sua formação inicial, participando num projeto relacionado com a comunicação matemática. Integra, poucos anos mais tarde, outro relacionado com essa temática mas na vertente escrita. Empenha-se, também, na participação, a nível nacional, num projeto curricular, relacionado com o Programa de Matemática. A aposta na sua formação é complementada, também, com a frequência de encontros de professores de Matemática, já que identifica nessa oportunidade uma forma de partilhar experiências e recursos didáticos relacionados com a sala de aula. No seu dia-a-dia, valoriza o trabalho colaborativo entre professores, especialmente quando esse contribui para a reflexão sobre a sua prática. Contudo, reconhece que, atualmente, a reflexão com os seus colegas de Agrupamento ocorre, essencialmente, em encontros informais e se restringe, globalmente, à troca de experiências relacionadas com a exploração de certos recursos para a sala de aula.

Professor Afonso. Afonso tem mais três anos de experiência do que Ana e, dos três, é o professor com menos experiência de formação. É com a participação neste projeto que contacta pela primeira vez com um projeto de investigação. Também não costuma frequentar encontros de professores de Matemática. À semelhança de Ana, a reflexão que faz com os seus colegas também se resume à troca de experiências relacionadas com a implementação de recursos didáticos para a sala de aula. O trabalho colaborativo que faz com os seus colegas é, essencialmente, para preparação de materiais curriculares para uso em sala de aula.

Professor Jorge. Jorge é o que tem mais anos de docência, mais cinco anos do que o Afonso e mais oito do que Ana. É um professor que aposta muito na sua formação, através da participação em projetos de investigação e curriculares, em encontros de professores de Matemática e em encontros relacionados com a tecnologia. O seu envolvimento nestes últimos encontros justifica-se por ser formador na especialidade do uso de tecnologias na sala de aula. Aposta na participação em projetos de investigação, porque vê nessas oportunidades uma forma de realizar um tipo de trabalho diferente com os seus alunos. Reconhece que esses projetos lhe permite realizar aprendizagens com implicações na sua prática letiva e colmatar uma falta que sente, atualmente, na sua profissão – realização de trabalho colaborativo com os seus colegas. O professor procura refletir sobre a sua prática quando se envolve no processo de planificação de cada aula, onde tenta identificar aspetos que precisam ser clarificados, aprofundados ou adaptados aos seus alunos, face às dificuldades detetadas.

Os três professores decidem aceitar o desafio de se associarem a este projeto de investigação, porque os temas da Álgebra e da discussão coletiva lhes despertam interesse e porque valorizam bastante o trabalho colaborativo e reflexão sobre as práticas de sala de aula.

Preparação da discussão coletiva

A preparação da discussão coletiva é analisada em dois momentos distintos: antes da aula e em sala de aula. Relativamente à preparação da discussão antes da aula, destaco que os três professores que constituem os casos do estudo não preparavam, antes da sua participação no grupo colaborativo, a discussão coletiva de uma forma sistemática e refletida, embora pensassem em alguns aspetos importantes dessa preparação, como em possíveis estratégias que os alunos poderiam desenvolver e no objetivo que pretendiam atingir com a discussão. O trabalho desenvolvido no grupo colaborativo contribuiu, assim, para compreender e empreender essa prática.

A preparação da discussão matemática coletiva pelos professores, antes da aula, tem início com a escolha das tarefas a apresentar aos seus alunos, seguida da definição dos propósitos a atingir com a discussão dessas tarefas. Delineado esse trabalho, os professores passam à antecipação de possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos e definição de uma possível sequência para a apresentação dessas estratégias. Em sala de aula, dão continuidade à preparação da discussão, através do acompanhamento que fazem ao trabalho autónomo dos alunos. Nesse acompanhamento, identificam as resoluções produzidas pelos alunos e começam a pensar na melhor ordem para chamar os alunos a apresentar as suas resoluções, face aos objetivos traçados para a discussão que pretendem promover. A continuação da preparação da discussão em sala de aula justifica-se na medida em que não é possível prever todas as estratégias de resolução que podem surgir no trabalho dos alunos e, consequentemente, a seleção das estratégias a apresentar e a ordem pelas quais as intervenções devem ocorrer pode ser reformulada, face à planificação feita antes da aula.

Em seguida, discuto a prática dos professores na escolha das tarefas a propor aos seus alunos para os envolver em discussões coletivas, bem como o objetivo que pretendem atingir com essa discussão.

Tarefas e propósito da discussão. A preparação da discussão coletiva, antes da aula, tem início com a escolha das tarefas, momento em que os professores refletem sobre a natureza e desafio associado a cada uma, ao contexto proporcionado aos alunos e às representações suscitadas.

Os professores selecionam criteriosamente as tarefas a apresentar aos seus alunos, garantindo que têm enquadramento curricular e estão relacionadas com os conteúdos que estão abordar no momento em sala de aula e também com os temas que estão a ser trabalhados no grupo colaborativo.

Quanto à *natureza* das tarefas, Ana valoriza tarefas que não sejam demasiado abertas nem se afastem do tipo de trabalho habitual dos alunos; Jorge opta por tarefas que permitam aos alunos envolverem-se em experiências de aprendizagem diversificadas e que sejam claras nas questões colocadas; e Afonso prefere tarefas que sejam interessantes e despertem a curiosidade dos alunos. No que respeita ao nível de *desafio* das tarefas, Afonso e Jorge preferem tarefas com um nível de exigência mais elevado (problemas e investigações), por favorecem a discussão matemática. Afonso considera, ainda, que esse tipo de tarefas se coaduna com a emergência de diferentes estratégias de resolução, que enriquecem, posteriormente, a discussão coletiva. A este respeito, destaca, também, as potencialidades que os problemas oferecem para mostrar aos alunos que um mesmo problema pode ser resolvido de diversas formas e para os ajudar a superar dificuldades na tradução de informação apresentada em linguagem natural para linguagem matemática.

Conjugando a natureza e o nível de desafio, Ana opta por adaptar a tarefa *Inscrição no ginásio* pela natureza aberta da proposta apresentada pela investigadora (surgia formulada de forma aberta), atendendo às suas preocupações quanto à natureza das tarefas e partilhadas também pelos seus colegas. Essa adaptação foi, também, inspirada no trabalho realizado e partilhado no grupo de formação. Dessa forma, os professores transformam uma investigação numa exploração, estruturando-a em diversos pedidos com um nível de desafio crescente, que culmina na escrita de expressões representativas das funções afim e linear, onde também têm o cuidado de promover o trabalho com diferentes representações, algébrica e não algébrica.

Os professores também propõem outras tarefas para além das apresentadas pela investigadora. Por exemplo, os professores decidem, em grupo colaborativo, explorar a tarefa *Sacos e bolas*, apresentada por Jorge, com o intuito de ampliar as experiências de aprendizagem proporcionadas pela tarefa *Eleição do delegado de turma*. Esta tarefa favorece o trabalho com uma situação que implica a passagem de uma certa quantidade de um objeto para outro, que é identificada pelos professores como problemática nas reflexões que mantêm no grupo de formação. É evidente o contágio do trabalho desenvolvido no grupo colaborativo com o de formação.

Em consonância com esta preocupação dos professores em escolher tarefas que ajudem os alunos a superar dificuldades, o professor Jorge propõe a tarefa *Funções e* *futebol*, por considerar ser uma situação promotora da interpretação dos parâmetros que figuram nas expressões representativas das funções afim e linear e para comparar/discutir/analisar a alteração de simbologia na passagem do 7.º ano para o 8.º ano. A propósito, este professor reflete, no grupo de formação, sobre a dificuldade dos alunos em lidar com quatro letras na expressão da função afim ($y = mx + b$) e a alteração da apresentação da função linear do 7.º ano ($y = kx$) para o 8.º ano($y = mx$). Esta preocupação mostrada pelo professor permite-me lançar duas interrogações: Será que se devem usar sempre as mesmas letras para designar os parâmetros ou as variáveis que figuram numa expressão que vai surgindo ao longo dos diversas anos de escolaridade? ou, Será que é importante haver alteração de simbologia e ser analisada e interpretada com os alunos, de modo a que consigam lidar com segurança com a apresentação de expressões distintas para o mesmo conceito?

A proposta desta tarefa por Jorge, reflete o seu interesse pessoal pelas tecnologias e as suas experiências letivas de anos anteriores quanto à exploração dos conceitos de função afim e de função linear. Esta tarefa é retomada do ano anterior por a considerar um caso de sucesso, principalmente, no auxílio da tecnologia à interpretação e atribuição de significado aos conceitos de declive e de ordenada na origem e no estabelecimento de relações e propriedades importantes das funções afim e linear, como a relação entre o declive da função e a posição relativa de retas.

As tarefas exploradas por Ana e Afonso em sala de aula foram bastante equilibradas quanto à natureza e desafio exigidos aos alunos, conciliando explorações e investigações com problemas. Jorge apostou, essencialmente, na resolução de problemas, embora também tenha desenvolvido uma investigação com recurso à calculadora gráfica, possivelmente, pelo tipo de tarefas que valoriza – tarefas com um maior nível de desafio – e por acreditar que se ajustam bem à promoção de discussões.

Para todas as tarefas escolhidas, os professores apostaram em *contextos* não puramente matemáticos, que permitissem proporcionar experiências de aprendizagem diferentes aos alunos, por forma a envolvê-los na sua resolução, em consequência das reflexões que mantiveram no grupo colaborativo e de formação. Para promover discussões em torno do trabalho com Sequências e regularidades, os professores optaram por contextos de jogos de construção, com uma figura no plano e outra no espaço. Este aspeto é, na perspetiva de Ana, bastante enriquecedor, já que no primeiro caso parte de um contexto familiar aos alunos, em virtude do tipo de trabalho desenvolvido no ciclo anterior ampliando, posteriormente, as experiências dos alunos ao permitir-lhes trabalhar com uma construção que envolve uma figura no espaço. Embora Ana considere que as tarefas devem ser próximas do trabalho habitual dos alunos, procura, simultaneamente, alargar as experiências de aprendizagem que lhes proporciona.

As tarefas *Inscrição no ginásio* e *Funções e futebol* apresentam situações próximas dos interesses dos alunos: a primeira, escolha do ginásio que oferece condições mais vantajosas, a partir da qual os alunos se vêm envolvidos na ponderação de opções que justifiquem a tomada de decisão por um dos ginásios; e, a segunda, a análise dos remates a fazer à baliza, de forma a que a bola entre na baliza ou colida com os postes.

Para a abordagem do tópico Equações, os professores selecionam tarefas que envolvem contextos próximos do quotidiano ou que surgem em situações de "enigmas" e que favoreçam a atribuição de diversas designações à incógnita, de modo a proporcionar a escrita de diversas equações para a mesma tradução de linguagem natural para matemática.

As tarefas escolhidas pelos professores apelam ao uso de *representações* diversificadas. Nas tarefas relacionadas com o tópico Sequências e regularidades, os professores explicitam claramente o trabalho com a representação algébrica e nos problemas com equações ou sistemas de equações, os professores optam por não dar indicação expressa da representação a usar, sendo que o seu objetivo é o uso da representação algébrica, embora admitam o trabalho com representações menos formais, como a tabular e a numérica (na tentativa e erro). O uso destas representações não algébricas são, também, antecipadas pelos professores aquando da preparação da discussão no grupo colaborativo. Nas tarefas do tópico Funções e, em particular, na tarefa *Inscrição no ginásio*, os professores sugerem, expressamente, o trabalho com as representações algébrica e não algébrica.

As tarefas apresentadas pelos professores aos alunos refletem níveis de estruturação diferentes, já que as primeiras surgem organizadas em diversos pedidos com encadeamento do seu trabalho até à emergência da representação algébrica, surgindo as seguintes menos estruturadas, de forma a darem uma maior liberdade de atuação aos alunos e promoverem a sua criatividade na resolução das tarefas. É notório que os professores pretendem que os alunos se tornem cada vez mais autónomos no trabalho em Matemática, delineando etapas de resolução que lhes permitam obter com sucesso a resposta procurada.

Selecionadas as tarefas a apresentar aos seus alunos, os professores definem, de seguida, o objetivo que têm para a discussão coletiva, que está relacionado com os conteúdos que estão a abordar nesse momento em sala de aula. Dessa forma, o propósito que definem para a discussão está sempre relacionado com a *generalização* de diversas relações estabelecidas durante o trabalho dos alunos com as tarefas propostas, como a escrita do termo geral de uma sequência; a escrita de expressões representativas da função afim e da função linear e a escrita de equações e de sistemas de equações para informação apresentada em linguagem natural.

Na preparação da discussão em sala de aula, durante o acompanhamento ao trabalho autónomo dos alunos, os professores identificam os *conceitos* e os procedimentos matemáticos que estão envolvidos nas resoluções dos alunos. A pertinência desse trabalho justifica-se na medida em que os apoia na organização da discussão que conduzem seguidamente.

Em síntese, um olhar transversal sobre o tipo de tarefas propostas aos alunos evidencia que os professores escolhem para iniciar tarefas mais abertas (explorações e investigações) mas mais estruturadas em termos de pedidos formulados aos alunos, avançando, seguidamente, para tarefas mais fechadas e organizadas num único pedido (problemas). Os professores encontram nessa metodologia uma forma de promover discussões coletivas produtivas, atribuindo uma maior responsabilidade de atuação aos alunos, sendo eles chamados a criar um plano de trabalho que lhes permita alcançar o esperado. As tarefas concebidas e escolhidas pelos professores para promover discussões mostram que é compatível ter tarefas abertas com o objetivo de levar os alunos à generalização de ideias algébricas.

As tarefas preparadas pelos professores permitem interrogar se a natureza das tarefas apresentadas está relacionada com os conteúdos programáticos escolhidos para essas discussões, assim como se há tarefas mais adequadas para promover a discussão de determinados conteúdos. No trabalho com diferentes representações, os professores vão deixando cair, ao longo do tempo, a indicação expressa da representação a usar, em virtude do trabalho que já vem sendo feito e também para dar mais liberdade de atuação aos alunos.

Percorrendo os três casos, evidencio, como mostra a figura 19, que os professores casos apresentam algumas particularidades. Jorge aposta em tarefas com um nível de desafio maior enquanto os seus colegas articulam tarefas mais desafiantes com tarefas menos desafiantes.

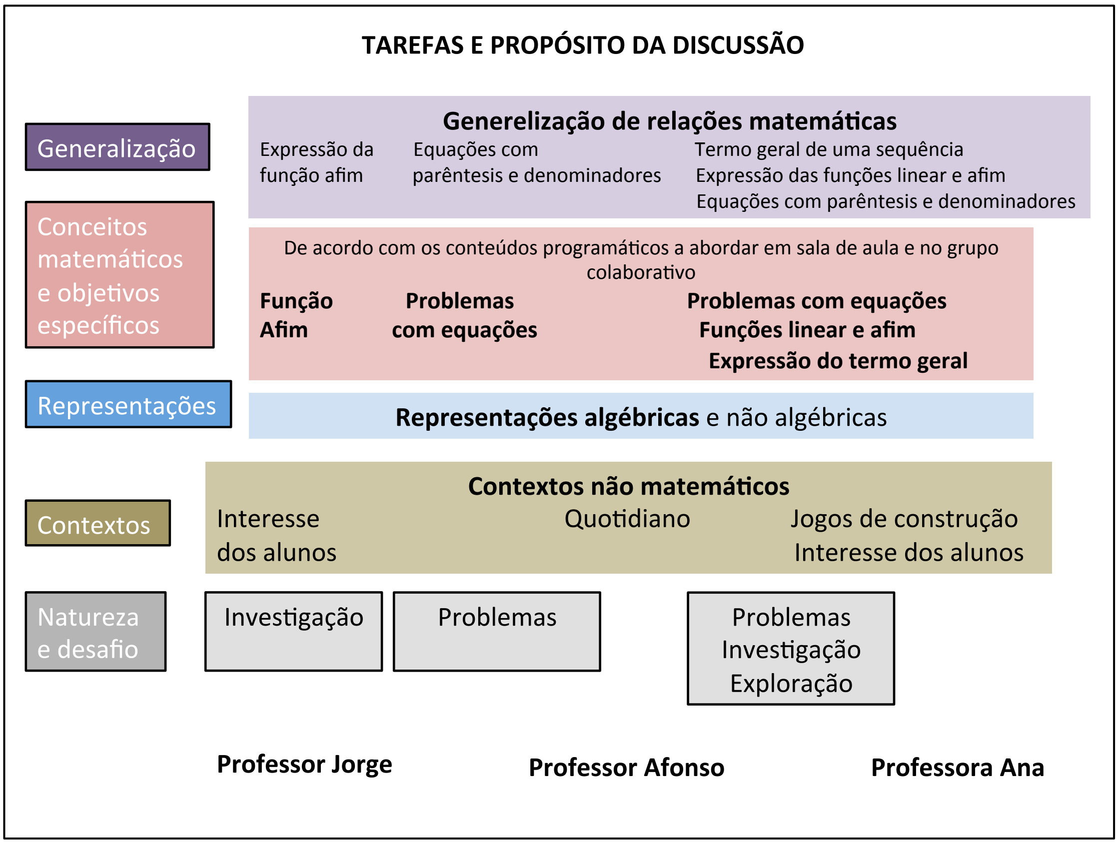


Figura 19: Preparação da discussão coletiva – Tarefas e propósito da discussão.

Em sintonia, com o desafio subjacente às tarefas surgem os contextos privilegiados. Ana e Afonso sugerem tarefas com contextos diversificados e Jorge foca o trabalho dos alunos em contextos do quotidiano, onde a tarefa de investigação encaminha os alunos para uma situação do seu interesse – jogo de futebol. Todos os professores privilegiam as representações algébricas nas tarefas escolhidas, porque o seu propósito para a discussão é a generalização de relações matemáticas. Contudo, também preveem e identificam o trabalho dos alunos com as representações não algébricas. De acordo com os conteúdos programáticos que estão a tratar em sala de aula, os professores contemplam, com as tarefas escolhidas, o trabalho das funções afim e linear, a resolução de problemas envolvendo equações ou sistemas de equações e a escrita da expressão do termo geral de uma sequência.

Estratégias de resolução. Definidas as tarefas a apresentar aos alunos e o propósito que pretendem alcançar com o seu envolvimento na discussão, os professores pensam, agora, sobre prováveis resoluções que os alunos podem realizar para cada tarefa proposta. O trabalho de antecipação de possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos é feito por todos os professores no grupo colaborativo. Os professores antecipam para as diversas tarefas três tipos principais de estratégias: tentativa e erro, tabela e algébrica. A *estratégia tabular* é antecipada como um meio de organização das diversas tentativas feitas pelos alunos em cada tarefa. No entanto, esta estratégia também surge de forma intencional na tarefa *Inscrição no ginásio*, na qual os alunos, para o preenchimento da tabela, podem recorrer a raciocínios recursivos ou estabelecer uma relação entre as duas variáveis em jogo.

A *estratégia por tentativa e erro* é antecipada para todas as tarefas, embora com algumas especificidades: no caso das tarefas relacionadas com o tópico Sequências e Regularidades, os professores preveem que os alunos continuem a escrever todos os termos da sequência até encontrarem o pretendido; nas tarefas relacionadas com as Funções, os professores supõem que os alunos recorram a raciocínios recursivos, adicionando sempre o valor da mensalidade em cada um dos ginásios e façam experiências com recurso à calculadora gráfica; e nas tarefas envolvendo equações ou sistemas de equações que os alunos iniciem as suas tentativas por um número redondo e vão ajustando as suas tentativas até encontrarem o valor esperado.

A *estratégia algébrica* é antecipada para todas as tarefas, pois todas as propostas têm como objetivo a generalização das relações matemáticas em análise, através: da escrita de expressões para o termo geral de sequências; de expressões representativas da função afim e da função linear; e de equações, enquanto generalizações de relações apresentadas em linguagem natural. Nesta antecipação da estratégia algébrica, os professores privilegiam a generalização com significado dessas relações matemáticas. Isto é, pretendem que os alunos aquando da escrita da expressão do termo geral de uma sequência o façam por análise do padrão que configura a imagem, de modo a relacionarem os conceitos de ordem e termo de uma sequência e escrevam diferentes equações para a mesma tradução de informação apresentada em linguagem natural, em consequência da atribuição da incógnita a entes diversos.

Em sala de aula, os professores identificam no trabalho dos alunos as estratégias de resolução antecipadas, salientando algumas surpresas face à preparação feita previamente. Jorge partilha com entusiasmo a ocorrência de uma estratégia não antecipada na tarefa *Sacos e bolas* que consistiu na atribuição da incógnita a uma informação não contemplada pelos professores. Valoriza essa resolução, na medida em que permite discutir interpretações diferentes para a mesma informação apresentada em linguagem natural e, consequentemente, o trabalho com procedimentos diferentes dos envolvidos na estratégia mais frequente. No caso das tarefas *O cavalo e o burro* e *O retângulo num quadrado*, Jorge menciona, também, que surgiu uma resolução não contemplada no grupo colaborativo, mas antecipada por si no seu trabalho de preparação individual: a escrita de um única equação em vez de um sistema de equações. Contudo, frisa, também, que a emergência dessa estratégia decorre do desafio lançado a um grupo de alunos que concluiu a resolução da tarefa antes dos restantes colegas. É a preparação prévia da discussão que faz antes da aula que lhe permite em sala de aula conduzir os alunos para a procura de resoluções que considera ajustadas às suas características e prescindir de outras que também tinha antecipado. Usa essa estratégia de ensino como forma de lidar com a heterogeneidade dos alunos, nomeadamente com os que têm uma maior apreciação pela Matemática. É este trabalho que lhe permite lidar com segurança com as imprevisibilidades e desafios da implementação de uma discussão coletiva em sala de aula. Neste caso, posso ainda inferir que a não antecipação destas estratégias não permitiria ter uma discussão tão rica, já que as resoluções apresentadas pelos alunos foram semelhantes. Só este tipo de trabalho favorece a ampliação das experiências dos alunos.

Na tarefa *A cantina da escola*, Ana destaca também o aparecimento de uma situação que surge para a estratégia por tentativa e erro que só foi antecipada pelos professores, no grupo colaborativo, para a estratégia algébrica: retirar ao número total de almoços o número de almoços conhecido e trabalhar com a informação respeitante a quatro dias da semana, iniciando as suas tentativas a partir do resultado do quociente da diferença anterior por quatro. Justifico a não antecipação dessa estratégia pelos professores pelo reduzido grau de exigência presente numa estratégia por tentativa e erro, baseada essencialmente na experimentação de valores arbitrários. Contudo, a emergência desta estratégia mostra que o desenvolvimento deste tipo de raciocínios pode valorizar e enriquecer a estratégia por tentativa e erro.

A identificação do tipo de estratégias desenvolvidas pelos alunos permite também reconhecer as dificuldades que estes enfrentam no trabalho com as diferentes tarefas. A este respeito, os professores refletem sobre as dificuldades dos alunos em escrever expressões para o termo geral de uma sequência, que traduza um raciocínio diferente do envolvido na tradução da sequência pictórica por uma sequência numérica e identificação da razão que permite passar de um termo para o seguinte, desligada da análise do padrão que configura a imagem. Estas dificuldades estão diretamente relacionadas com outra também identificada pelos professores: explicação de uma expressão apresentada para o termo geral de uma sequência. Esta dificuldade é justificada por Ana com o tipo de trabalho desenvolvido com os alunos no 2.º ciclo do ensino básico. Ana encontra na identificação das estratégias desenvolvidas pelos alunos, na tarefa *Cubos com autocolantes* (sequência pictórica envolvendo uma construção no espaço, que considera que se afasta do tipo de trabalho realizado em anos anteriores), força para esse argumento. Na verdade, verifica que os alunos, nessa tarefa, não começam por traduzir a sequência pictórica por uma sequência numérica e não a estudam desligada do padrão que configura a imagem, como o fizeram na tarefa *Palitos*, embora a questão formulada também solicite a escrita da expressão do termo geral da sequência. Esse acontecimento permite-me as seguintes interrogações: Será que o trabalho com construções no espaço é mais promotor da escrita com compreensão do termo geral de uma sequência? Será que o trabalho com tarefas que se afastem da prática diária habitual dos alunos favorece novos entendimentos e um olhar renovado sobre os conceitos?

As dificuldades apontadas pelos professores levam-me à seguinte reflexão: é importante esbater a tendência dos alunos de traduzirem uma sequência pictórica por uma numérica quando trabalham com tarefas algébricas e desenvolver um trabalho apoiado na compreensão das relações existentes na escrita de uma expressão, não olhando para uma expressão como uma sequência de letras e de operações. O trabalho desenvolvido em torno das tarefas relacionadas com as sequências mostra o quão importante é promover e incentivar a exploração de situações que levem os alunos a escrever expressões para os termos gerais, a partir da análise do padrão que configura a imagem, pois só ele pode promover o envolvimento dos alunos na interpretação e explicação de expressões diferentes das pensadas por si.

Afonso acrescenta, ainda, que na tarefa *Palitos*, na questão em que os alunos tinham de explicar a expressão do termo geral da sequência, estes seguem a estratégia de determinar alguns termos para confirmar a veracidade da expressão escrita. O que Afonso quer destacar é que os alunos encontram na concretização de casos particulares uma forma de justificação e explicação.

No caso da tarefa *Inscrição no ginásio*, os professores refletem também sobre as dificuldades dos alunos na escolha da escala para a elaboração do gráfico. Este aspeto não tinha sido antecipado como problemático pelo grupo colaborativo, mostrando a grande imprevisibilidade associada à condução de uma discussão coletiva. Contudo, este trabalho de preparação da discussão permite, seguidamente, lidar com mais segurança com a sua condução, na medida em que os professores já tiverem possibilidade de lidar com os erros dos alunos e ajudá-los a superá-los, pensando sobre as potencialidades desse erro ser discutido ou não em coletivo.

No caso das tarefas relacionadas com a resolução de sistemas de equações, os professores também antecipam dificuldades na interpretação do enunciado e consequente tradução para linguagem matemática. Perante essas dificuldades, Jorge considera que a melhor estratégia para ajudar os alunos, sem diminuir o nível de exigência da tarefa e mantê-los envolvidos na resolução, é focar a sua atenção em aspetos importantes do enunciado.

Um olhar global sobre os três professores permite afirmar que a antecipação de possíveis estratégias de resolução para as tarefas propostas é comum, pois é realizada em conjunto no grupo colaborativo e apoia-se em três tipos de estratégias: tentativa e erro, tabular e algébrica, como evidencia a figura 20.

Em sala de aula, a identificação do tipo de estratégias nos trabalhos dos alunos já apresenta algumas singularidades. Só a estratégias algébrica é identificada para todas as tarefas por todos os professores. Este facto é paradoxal: surpreende, na medida em que é o tipo de estratégia mais potente do ponto de vista do uso da linguagem algébrica; não surpreende, porque quando as tarefas são apresentadas aos alunos já tinham explorado outras relacionadas com esses conteúdos.

Curiosamente, a estratégia por tentativa e erro, sendo a menos exigente do ponto de vista do uso da linguagem algébrica, não emerge sempre nos trabalhos dos alunos, como foi o caso da turma de Afonso na tarefa relacionada com as Equações. Contudo, nos casos em que aparece como estratégia privilegiada pelos alunos mobiliza raciocínios diferentes da experimentação arbitrária de números.

A estratégia tabular surge, predominantemente, na tarefa do tópico Funções, para os professores Afonso e Ana, pois era induzida explicitamente no enunciado da tarefa. A prática de Jorge distingue-se da dos seus colegas relativamente a esta dimensão da preparação da discussão, já que este professor completa, em casa, o trabalho realizado no grupo colaborativo com uma preparação individual de mais estratégias de resolução. Esse trabalho tem repercussões na sua ação em sala de aula no desafio lançado aos alunos para procurar estratégias diferentes das já realizadas, sempre que acabam o seu trabalho mais cedo que os seus colegas. Concilia esse desafio com as apreciações dos alunos face à Matemática, isto é, os alunos com uma atitude mais positiva em relação à Matemática são incentivados a apresentarem outras estratégias de resolução diferentes das realizadas na primeira abordagem à tarefa.

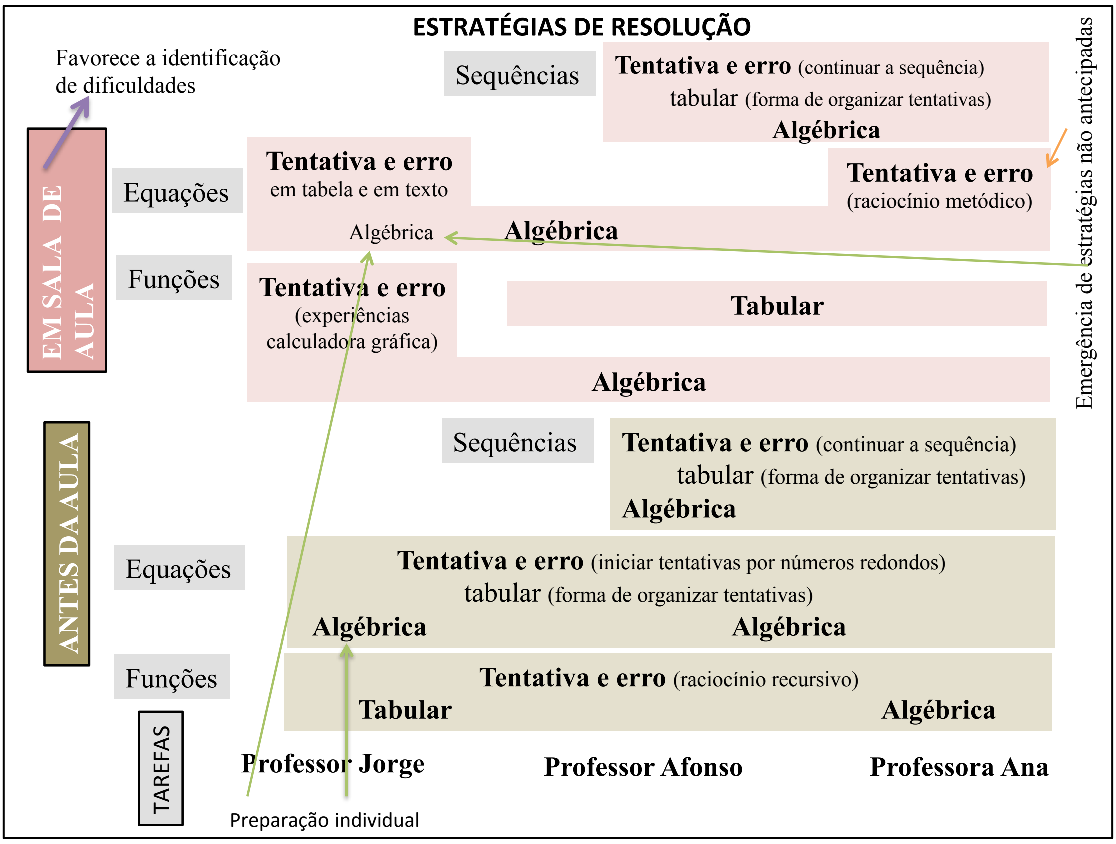


Figura 20: Preparação da discussão coletiva – Estratégias de resolução.

Os professores Ana e Jorge são surpreendidos em sala de aula com a emergência de estratégias não antecipadas para as tarefas do tópico Equações. No caso de Jorge é o aparecimento de uma estratégia algébrica, enquanto para Ana é o surgimento de uma estratégia por tentativa e erro, mas apoiada num raciocínio distinto da experimentação aleatória de números.

Em sala de aula, o trabalho dos professores de identificação das estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos é relevante para o reconhecimento das dificuldades apresentadas por eles durante a resolução das tarefas. Essa ação favorece a sua posterior reflexão para inclusão ou não desses erros na discussão coletiva.

Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação. Após a antecipação das estratégias de resolução, os professores refletem, seguidamente, sobre as estratégias que devem selecionar para apresentar em coletivo e sobre a melhor ordem para chamar os alunos a intervir.

Na preparação prévia da discussão no grupo colaborativo, os professores estipulam que selecionarão estratégias de resolução que recorram a representações diversificadas e que a ordem de apresentação deve privilegiar a evolução da linguagem matemática informal (representações não algébricas) para a formal (representações algébricas), com vista à generalização de relações matemáticas.

Em sala de aula, os professores implementam a preparação feita sem grandes surpresas, sendo desafiados a incorporar na sua antecipação as estratégias novas que emergem nas resoluções dos alunos. Afonso, apoiando-se no trabalho realizado no grupo colaborativo, em sala de aula, decide iniciar a apresentação das estratégias pelas que envolvem linguagem informal, mas acrescentando o critério: estratégias singulares. Essa forma de atuação não é seguida em todas as discussões coletivas que orienta em sala de aula. Por exemplo, no caso da tarefa *Eleição do delegado de turma*, opta por deixar para último lugar uma estratégia diferente. Contudo, essa opção justifica-se por ter sido uma estratégia suplementar apresentada por um grupo de alunos e, principalmente, por envolver uma interpretação do enunciado diferente da realizada pela grande maioria dos alunos. Afonso defende que a sua atuação foi pautada pelo critério das mais frequentes para as estratégias singulares, já que considera que é uma condição necessária para ter os alunos envolvidos. Contudo, com a sua participação no grupo colaborativo, a sua prática altera-se e passa a privilegiar como critério o crescente nível de complexidade.

A prática de Jorge segue a linha da preparação do grupo colaborativo, já que identifica nessa forma de atuação um meio de valorizar o trabalho de todos os alunos, uma vez que, para este professor, as estratégias que recorrem a representações envolvendo linguagem não algébrica são produzidas pelos alunos com mais dificuldades. Justifica a opção por selecionar essas estratégias para apresentação por considerar que torna a discussão mais rica e, fundamentalmente, porque permite mostrar abordagens diferentes à mesma tarefa. Reforça, ainda, que com essa prática mostra que os alunos com uma atitude menos positiva face à Matemática dão um contributo importante à aula. Avança, seguidamente, para as que recorrem a linguagem algébrica, deixando para último a apresentação das estratégias que surgiram de forma isolada na turma e que emergiram por sugestão sua. Para Jorge, a apresentação de estratégias singulares deve ser bem refletida, já que, na sua perspetiva, só devem ser exibidas se forem acessíveis à maior parte dos alunos. Uma reflexão posterior sobre a apresentação dessas estratégias leva Jorge a concluir que, no futuro, para envolver mais a turma na análise de estratégias singulares, a sua prática deve ser alterada, convidando outros alunos a interpretarem e a explicarem como os colegas pensaram. Esta reflexão surge do facto de considerar que a maior dificuldade que enfrenta na condução de uma discussão é envolver todos os alunos na partilha de ideias. Segundo ele, os alunos desligam quando os outros apresentam a sua estratégia. Em simultâneo, trabalha um aspeto que sente que os alunos têm muitas dificuldades: explicar raciocínios seguidos por outros. Este argumento encontra força nas práticas dos professores Afonso e Ana, já que encontram na questão que solicita a explicação da expressão do termo geral de uma sequência, na tarefa *Palitos*, a maior dificuldade dos alunos.

Jorge acrescenta, ainda, que a opção por selecionar várias estratégias de resolução que recorrem ao uso de linguagem algébrica se fica a dever à importância que reconhece à partilha de diferentes interpretações matemáticas para a mesma apresentação de informação em linguagem natural e à análise dos procedimentos envolvidos nessas representações algébricas. Considera que a sua forma de atuação foi significativa, uma vez que identificou a emergência de algumas estratégias partilhadas em trabalhos posteriores dos alunos.

Olhando transversalmente para a prática dos três professores (Figura 21), o trabalho de antecipação de seleção e sequenciação das estratégias de resolução volta a ser o mesmo para os três casos, em virtude da preparação ser realizada colaborativamente. Em sala de aula, as práticas dos professores são muito semelhantes e seguem em harmonia com a previsão pensada. Especificamente, os professores selecionam para apresentação em coletivo estratégias que envolvem representações diversificadas, mas que favorecem a evolução das representações não algébricas para as algébricas. Esse critério está em linha com o tipo de estratégias identificadas nas resoluções dos alunos e, especialmente, com a promoção da linguagem algébrica que pretendem fomentar com a sequenciação que definem antes da aula e em sala de aula, transitando da linguagem matemática informal para a linguagem formal.

Contudo, podem identificar-se algumas particularidades nas ações dos professores. Jorge e Ana, embora apoiando-se na antecipação realizada em conjunto com os seus colegas para a seleção e sequenciação, conciliam a evolução da linguagem matemática informal para formal com a transição das representações não algébricas para as algébricas e com o critério progressão das estratégias mais frequentes para as menos frequentes. A opção por esta linha de pensamento no caso de Jorge, está relacionada com o que acredita potenciar o envolvimento dos alunos na discussão – partilha de estratégias singulares só se envolverem raciocínios mais simples e acessíveis à globalidade dos alunos. A sua ação mostra que essas estratégias mais potentes do ponto de vista da utilização da linguagem algébrica, que são de facto menos frequentes, são desenvolvidas por alunos com uma atitude mais positiva face à Matemática. A ação de Ana pode ter sido influenciada pela partilha de experiências no grupo colaborativo e, especialmente, pela influência de práticas de tantos anos de trabalho em comum com Jorge. Já Afonso, inclui o critério nível de complexidade face aos raciocínios mobilizados na escolha das estratégias a apresentar e na ordem que define para essa partilha, em articulação com o trabalho de preparação feito no grupo colaborativo.

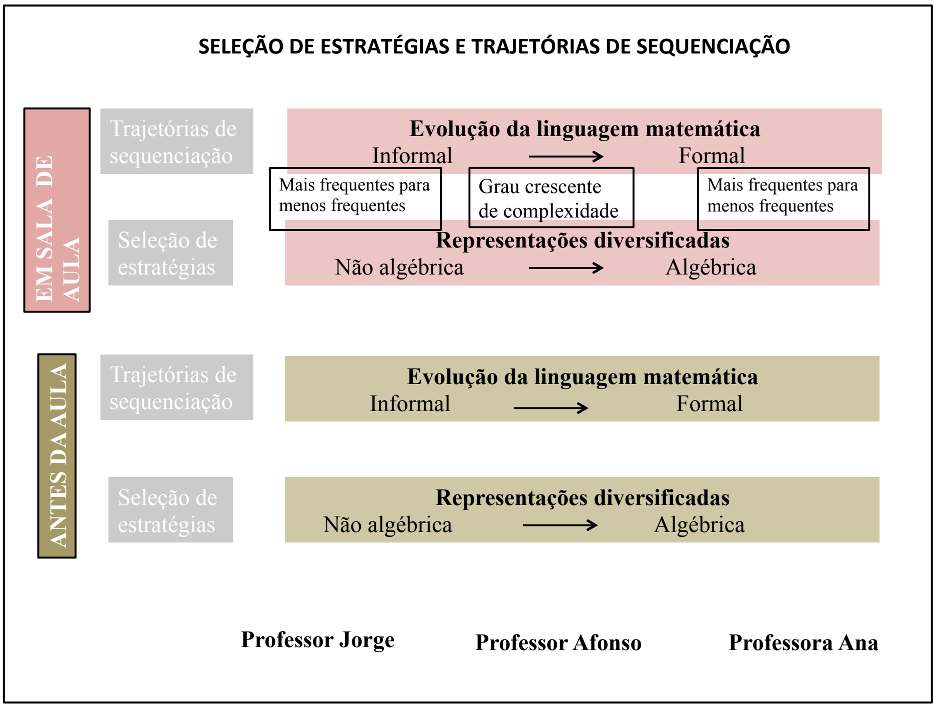


Figura 21: Preparação da discussão coletiva – Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação.

Dinamização da discussão coletiva

A dinamização da discussão coletiva é analisada segundo duas dimensões principais. Na primeira, reflito sobre a forma como os professores organizam a discussão, de modo a levarem os alunos a apresentarem as suas estratégias de resolução, acrescentarem outras, justificarem raciocínios, argumentarem sobre os dos colegas até à sistematização das principais ideias estabelecidas durante o seu envolvimento nas etapas anteriores. Olho, ainda, para o discurso gerado durante a participação dos alunos na discussão. Na segunda dimensão, analiso as ações de ensino que os professores executam em sala de aula para fomentarem o envolvimento dos alunos na discussão.

Componentes da discussão, discurso: Os professores do estudo estruturam a discussão ao longo de três momentos fundamentais: *i)* apresentação; *ii)* comparação, avaliação e filtragem; e *iii)* conclusão. Os professores iniciam sempre a discussão coletiva com a escolha dos alunos que pretendem que apresentem as suas estratégias de resolução.

A escolha das estratégias de resolução para iniciar a *apresentação* segue uma ideia importante discutida nas sessões de trabalho colaborativo – promover a emergência da linguagem algébrica. Dessa forma, os professores, perante as estratégias de resolução que surgem nos trabalhos dos alunos, iniciam a apresentação pelas que recorrem a linguagem matemática informal – estratégia por tentativa e erro, organizada de diversas formas. Baseados neste critério, ora começam pelas estratégias mais frequentes na turma, ora pelas que surgem de forma isolada. Ana, nas tarefas *Palitos* e *Inscrição no ginásio* inicia pela mais frequente, assim como Jorge na tarefa *Sacos e bolas*. Nas tarefas relacionadas com o tópico Equações, Ana começa pelas estratégias singulares, embora estas apresentem características diferentes, já que na tarefa *A família Rosa*, as tentativas dos alunos consistem em experimentações de números aleatórios enquanto na tarefa *A cantina da escola*, residem na escolha criteriosa de um número, resultante da manipulação das condições do enunciado e assumindo a divisão equitativa do número de almoços sobrantes pelos diversos dias da semana. Afonso também começa a apresentação das estratégias de resolução para a tarefa *Eleição do delegado de turma* por uma singular, estando as tentativas organizadas em tabela. No caso de Jorge, as tentativas surgem organizadas em texto.

Uma visão transversal sobre a prática de Ana, denota que o primeiro critério tem em linha de conta a promoção da linguagem algébrica e o segundo critério baseia-se no que considera potenciar o envolvimento dos alunos na discussão, selecionando para apresentação as estratégias desenvolvidas por um maior número de alunos. Acredita, assim, que terá os alunos envolvidos na discussão, acrescentando contributos importantes e participando ativamente nas explicações, justificações e argumentações oferecidas já que desenvolveram o mesmo tipo de raciocínio. Já Afonso também apoia a sua prática na promoção da linguagem algébrica, iniciando pelas estratégias envolvendo tentativa e erro, contudo, na tarefa *Palitos*, fá-lo da estratégia singular para a mais frequente. Apesar de os professores assumirem a grande dificuldade que os alunos têm em interessar-se pela análise de estratégias de resolução diferentes das suas, esta opção de Afonso prende-se com ideias mais potentes que surgem na estratégia mais frequente que não surgiam na singular – resolução baseada no recurso às operações aritméticas inversas (para verificar a pertença de um termo a uma sequência), em oposição à determinação de todos os termos da sequência até chegar ao pretendido.

Os professores dão continuidade à apresentação de estratégias introduzindo outras para análise que lhes permitem promover a *comparação, avaliação e filtragem*. Ana promove a comparação de estratégias na tarefa *Palitos*, aproveitando uma ideia que estava a ser valorizada na apresentação das resoluções (verificação da pertença de um termo à sequência a partir da escrita da expressão do termo geral) para levar os alunos a concluir que não é necessário conhecer o termo geral de uma sequência para verificar se um termo pertence ou não a essa sequência. Essa ação da professora mostra o quanto é importante saber o que valorizar ou deixar cair numa discussão, como foi o caso desta em que Ana não deixa a aluna concluir a sua intervenção (faltava a explicação para a verificação da resposta que o grupo sentiu necessidade de fazer), para seguir uma ideia que reconheceu ser importante. Este episódio alerta para os desafios que os professores enfrentam na dinamização da discussão e que marcam a sua imprevisibilidade. São situações como estas que podem caracterizar a produtividade de uma discussão e marcar a diferença na atuação de um professor. De facto, é mais fácil limitar a sua atuação à simples apresentação das estratégias pelos alunos. Contudo, não é de todo a prática desejável, na medida em que só assim o professor consegue promover a compreensão da Matemática.

Na tarefa *A cantina da escola*, a comparação de diversas estratégias leva a professora a analisar com os alunos a possibilidade de a mesma informação apresentada em linguagem natural admitir a tradução em linguagem matemática de diversas formas. Já Afonso promove a comparação informando que a incógnita representa entes diferentes. Este professor, na tarefa *Eleição do delegado de turma*, fomenta a comparação através da análise da resolução não algébrica, organizada em tabela, com a algébrica, ou através da conexão entre resoluções algébricas, a partir da atribuição de entes distintos à incógnita. Jorge também recorre à transição entre linguagens matemáticas diferentes (não algébrica para algébrica) na tarefa *Sacos e bolas*, para incitar a comparação através da atribuição da incógnita a designações distintas. Já na tarefa *Eleição do delegado de turma*, recorre à análise de um passo errado numa resolução que está a ser apresentada para promover a comparação, com a finalidade de levar os alunos a compreenderem a importância do rigor da linguagem matemática. A análise e discussão de erros é um aspeto que Jorge valoriza bastante numa discussão e que o distingue dos outros casos deste estudo.

Na tarefa *A família Rosa*, a comparação que Ana promove tem como objetivo alertar os alunos para a importância de apresentarem a resposta ao problema e não apenas a solução da equação resolvida. Já no tópico Sequências e regularidades usa a comparação para analisar com os alunos a emergência de duas expressões distintas para o termo geral da sequência, na tarefa *Cubos com autocolantes*. Esta professora recorre, também, à comparação, na tarefa *Inscrição no ginásio*, para prevenir para o uso rigoroso da linguagem matemática e para levar os alunos a compreender raciocínios que podem e não podem desenvolver numa determinada resolução, isto é, podem recorrer à ideia de dobro numa situação envolvendo uma relação de proporcionalidade direta, mas não o podem fazer em casos em que a relação entre as variáveis não é dessa natureza. Analisa, ainda, com os alunos o raciocínio que poderiam desenvolver de forma a usar a ideia de dobro numa função afim, promovendo, assim, a avaliação de ideias.

Ana leva, também, a turma a avaliar os raciocínios em discussão através do questionamento que dirige aos alunos que estão a acompanhar a explicação que está a decorrer no quadro e do desencadear de reações dos alunos para interpretações que oferece para os raciocínios apresentados. Por exemplo, na tarefa *A cantina da escola*, Ana ao mencionar que as equações escritas para o problema eram idênticas leva os alunos a relacionar o conjunto solução de equações diferentes com a unicidade da resposta ao problema, ou seja que a resposta ao problema era a mesma apesar de cada equação ter o seu conjunto solução.

As estratégias que os professores acrescentam à discussão revelam que o fazem com propósitos claros e carregados de intencionalidade matemática e não pela simples razão de que todas as estratégias de resolução terão de ser apresentadas em coletivo.

A *conclusão* da discussão serve para os professores focarem, relacionarem ou generalizarem ideias importantes discutidas ao longo da apresentação e comparação das estratégias de resolução apresentadas. Na tarefa *Inscrição no ginásio*, Ana leva os alunos a relacionarem a expressão das funções linear e afim com o respetivo nome e a atribuírem significado aos parâmetros envolvidos nas expressões. Afonso, de modo semelhante, aproveita, também, esta tarefa para relacionar representações, nomeadamente, a gráfica e a algébrica e para atribuir significado aos parâmetros envolvidos em cada uma das expressões. Jorge usa a conclusão da tarefa *Funções e futebol* para destacar os procedimentos a adotar na resolução analítica de uma questão, recordando, a esse respeito, os passos a seguir na resolução de uma equação. Este tipo de conclusão decorre das dificuldades identificadas nos alunos no acompanhamento ao seu trabalho autónomo, em particular, evitar a resolução analítica da questão, apostando na resolução gráfica.

Na tarefa *Cubos com autocolantes*, Ana aproveita a conclusão da discussão para desafiar os alunos a generalizar, através de uma expressão para o termo geral da sequência, uma relação que tinham estabelecido com casos particulares e explicarem a generalização que vão formalizando.

Nas tarefas do tópico Equações, a conclusão permite, aos professores Ana e Jorge, focar ideias importantes como, sensibilizar os alunos para a escrita de diferentes equações para a tradução da mesma informação apresentada em linguagem natural. Jorge reforça, ainda, as alterações de procedimentos e de conceitos entre as diferentes equações escritas. Na tarefa *Sacos e bolas*, este professor relembra, ainda, os passos a seguir na resolução de uma equação, como já o tinha feito na tarefa *Funções e futebol*, e alerta para a relação entre a solução da equação e a resposta ao problema, como também o faz Afonso na tarefa *Sacos e bolas*.

Focando, agora, o discurso promovido pelos professores durante a discussão, este segue um processo de estreitamento seguido de ampliação, e assim sucessivamente, em respetiva consonância com os momentos estruturantes da discussão. Mais especificamente, os professores começam por solicitar um grupo de alunos para apresentar a sua estratégia de resolução – *solicitação e discussão de muitas ideias* – seguidamente, promovem a comparação, avaliação e filtragem, focando a atenção dos alunos em alguma característica particular – *filtragem das ideias partilhadas*. A análise desses raciocínios particulares tem como objetivo despertar a introdução de mais ideias na discussão, através da inclusão de mais estratégias de resolução para comparação, originando, em termos de discurso, uma nova *solicitação e discussão de mais ideias*. Esse encadeamento continua até à conclusão da discussão.

Focando, agora, o conteúdo das ideias partilhas, um olhar macro sobre esse conteúdo denota que, numa primeira fase, os professores, embora tendo intenções claras sobre o que querem que seja apresentado, a sua preocupação reside, essencialmente, no início da discussão, tendo uma estratégia de resolução para analisar – *conteúdo matemático não filtrado*. Face a essa estratégia, a sua preocupação evolui para a análise de raciocínios especiais – *conteúdo matemático filtrado* – como um erro, uma explicação que precisa de ser melhorada ou uma ideia que necessita de ser desconstruída. O afunilamento que os professores fazem aos raciocínios dos alunos é para alcançar o propósito que definem para a discussão e para o estabelecimento de conclusões importantes.

Ana promove o discurso recorrendo à estratégia de ensino de convidar um aluno distinto do que expõe a resolução no quadro para explicar o raciocínio seguido pelo grupo, na tarefa *Inscrição no ginásio*, bem como incentivar os alunos a questionarem os colegas em vez da professora, devolvendo aos alunos que estão a expor a sua estratégia de resolução no quadro as questões que lhe são dirigidas. A ocorrência destas situações em sala de aula faz refletir sobre a forma como os alunos ainda encaram o seu papel e o do professor no seu processo de aprendizagem, reconhecendo, fundamentalmente, aos professores autoridade para o esclarecimento das suas dúvidas. Com esta prática, Ana mostra aos alunos como devem interagir numa discussão e, igualmente, a importância dos colegas no esclarecimento de dúvidas. De facto, não há ninguém melhor para esclarecer um raciocínio do que quem o realizou, embora também possa ser interpretado pelos outros. Mostra, também, aos alunos o que de facto significa trabalhar em grupo, nomeadamente, que todos devem estar preparados para entrar no discurso a qualquer momento e não somente o aluno que está a explicar a resolução no quadro. Conjeturo que esta forma de atuação de Ana na promoção do discurso, em particular, como encara e fomenta a comunicação matemática nos seus alunos, pode ser apoiada pelas suas aprendizagens realizadas com a sua participação nos projetos relacionados com a comunicação matemática. Acredito, também, que a partilha de experiências proporcionadas no grupo colaborativo possa ter contribuído, conjuntamente, para esta forma de atuação, especialmente, quando chama outros alunos a explicar raciocínios. Esta metodologia foi apontada por Jorge, no grupo colaborativo, como promotora do envolvimento dos alunos na discussão, sendo um aspeto que ele alteraria na sua prática.

A prática de Ana evidencia, ainda, que a professora tem ideias bem claras quanto ao que pretende discutir não se deixando afastar do seu propósito, mesmo quando os alunos tentam redirecionar a discussão para a análise da estratégia mais frequente, como aconteceu na tarefa *Cubos com autocolantes*. Para os manter envolvidos no discurso, recorre à ação de valorizar a estratégia mais frequente e desafiar a pensarem na menos frequente, focando a atenção dos alunos em aspetos importantes que precisam de ser clarificados. Tem por objetivo levá-los a interpretar raciocínios diferentes dos seus, já que identifica nos alunos dificuldades em acompanhar a apresentação de estratégias de resolução diferentes das suas. Para a mesma tarefa, Afonso procura que o discurso evolua no sentido de levar os alunos a relacionarem os conceitos matemáticos de ordem e de termo de uma sequência. Jorge, na tarefa *Eleição do delgado de turma*, leva os alunos a perceberem a importância de comunicarem com rigor as suas ideias. Fomenta o discurso dos alunos através da análise de um passo errado na estratégia de resolução apresentada por um grupo de alunos, que evolui para o oferecimento de diversas justificações para esse erro. A partir daí, o discurso amplia-se à apreciação de outras estratégias de resolução mais potentes do ponto de vista da utilização da linguagem algébrica.

Na tarefa *A cantina da escola*, Afonso foca o discurso na explicação dos monómios que figuram na equação escrita, de acordo com as condições do enunciado e a atribuição da incógnita, e nos procedimentos adotados para a resolução da equação, terminando na análise da relação entre a solução da equação e a resposta ao problema.

Na tarefa *Funções e futebol*, Jorge conduz o discurso da explicação de um raciocínio até à sistematização de relações importantes entre a monotonia da função afim e o respetivo declive. Analogamente, faz evoluir o discurso promovido, aquando da apresentação das estratégias de resolução da tarefa *Sacos e bolas*, da explicação da estratégia apresentada, em função da atribuição da incógnita, para a justificação do polinómio escrito no primeiro membro da equação.

Os professores caso deste estudo mostram estar cientes da importância da qualidade do discurso promovido durante uma discussão, esforçando-se por garantir o envolvimento dos alunos na análise de ideias matemáticas importantes e não na repetição de determinadas estratégias, em consequência de não encararem a discussão como um desfile de apresentações de todas as estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos. Contudo, nem sempre conseguem acompanhar as exposições dos alunos, sem condicionarem as suas explicações. Isso aconteceu, pontualmente, com Afonso e com Jorge na tarefa *Eleição do delegado de turma*. No caso de Afonso, a sua intervenção passou por prestar uma acompanhamento muito direto à explicação da aluna, introduzindo algumas justificações que deveriam ter sido oferecidas por ela. Com Jorge passa-se uma situação muito semelhante, em que o professor toma a palavra da aluna e apresenta, também, as justificações que deveria ter sido a aluna a dar. Os professores reconhecem a sua dificuldade em esperar pela resposta dos alunos, principalmente, quando estão pressionados pelo tempo ou quando têm objetivos a atingir, como foi aqui o caso. Jorge toma, involuntariamente, a palavra da aluna porque tinha em mente a introdução de um desafio aos alunos – pensarem numa nova estratégia de resolução que acrescentava contributos novos às já apresentadas. Já no caso de Afonso, a sua precipitação é explicada pela sua vontade em atingir o propósito que tinha definido para a discussão. Com Ana, surge também uma situação em que ela se precipita para o oferecimento de algumas interpretações para o que vai aparecendo no quadro, enquanto a aluna transcreve a resolução do grupo para a tarefa *Palitos*. Tudo leva a crer que a sua intenção era, simplesmente, despertar a atenção dos alunos para aspetos que devem ser mencionados na sua explicação.

Este tipo de situações leva a refletir sobre os desafios que os professores enfrentam na condução da discussão, em particular, na exigente tarefa de articular as intervenções dos alunos com as dos professores, quando o objetivo é promover discussões produtivas. Estes episódios mostram o quão importante é controlar o impulso dos professores em imporem as suas ideias aos alunos, dando-lhes tempo para apresentarem as suas, relacionando com outras já apresentadas, de forma a construírem justificações válidas e produzirem argumentos. Evidencia, também, que a condução da discussão em sala de aula não é a reprodução da preparação feita previamente, sendo importante refletir sobre os desvios que pode sofrer e as implicações que podem acarretar para a aprendizagem dos alunos.

Em síntese, os professores dão início à discussão com práticas muito semelhantes, como mostra a figura 22, com a escolha de um aluno para apresentar a sua estratégia, privilegiando, para começar, as resoluções que envolvem linguagem informal e foram realizadas por um maior número de alunos na turma. Evoluem, seguidamente, para o convite aos alunos que realizaram outras resoluções usando linguagem mais formal. Assim, os professores garantem a promoção da linguagem algébrica. Deixam para último a apresentação das estratégias singulares, com recurso a linguagem algébrica. Com esta atuação, fomentam a comparação, avaliação e filtragem dos raciocínios que estão a ser partilhados. A forma como transitam da apresentação para a comparação, promovendo o discurso entre os alunos, é distinta nos três casos: Ana opta por levar os alunos a analisar uma estratégia menos frequente, ou resoluções que recorram a representações diferentes; Afonso decide desafiar os alunos a relacionar os conceitos de ordem e termo ou explicar os monómios que figuram numa equação; e Jorge escolhe encaminhar os alunos para análise de um erro ou para a explicação de uma estratégia.

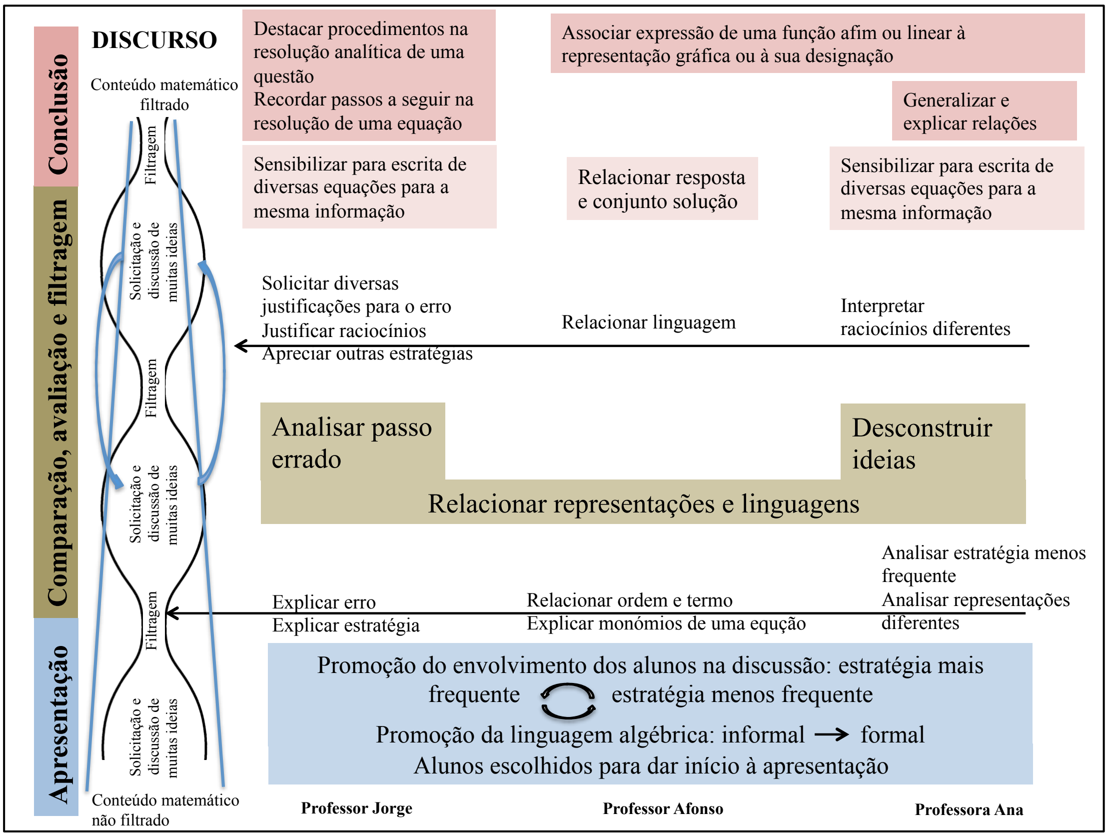


Figura 22: Dinamização da discussão – Componentes da discussão, discurso.

Com estas opções, os professores proporcionam aos alunos o relacionar de linguagens e representações. Adicionalmente, Ana ainda contribui com a sua atuação para desconstruir ideias e Jorge para levar os alunos a analisar um passo errado de uma resolução.

Ana leva os alunos a transitar da comparação e avaliação para a conclusão, incentivando-os a interpretar diversos raciocínios, de modo a sensibilizá-los para a possibilidade de escrita de diferentes equações para a mesma informação apresentada em linguagem natural, fomentar a generalização e explicação de relações matemáticas e levá-los a relacionar a expressão das funções afim e linear com a sua representação gráfica e com a sua designação. Esta última conclusão é também formalizada por Afonso, assim como a clarificação entre a resposta a um problema e o conjunto solução da equação resolvida. Consegue envolver os alunos nesta sistematização através da conexão entre linguagens. Já Jorge promove essa transição através do desafio lançado aos alunos para oferecerem diversas justificações para um erro, justificarem raciocínios e apreciarem outras estratégias diferentes das suas. Com isso, consegue sensibilizar os alunos para a escrita de diversas equações para a mesma apresentação de informação em linguagem natural, à semelhança de Ana, recordar com os alunos os passos a seguir na resolução de uma equação e destacar os procedimentos a seguir na resolução analítica de uma questão. O discurso promovido pelos professores sofre um afunilamento desde o momento de apresentação das estratégias de resolução, em que os professores têm um menor domínio sobre o que será introduzido na discussão, até à conclusão, onde as ideias sistematizadas são confirmadas pelos professores.

Ações de ensino. Durante a condução da discussão, os professores implementam quatro tipos de ações de ensino para levar os alunos a progredir na partilha de ideias e a envolverem-se na justificação, argumentação e sistematização, nomeadamente nas ações de elicitar, de informar, de desafiar e de apoiar.

Os professores recorrem às *ações de elicitar* para dar início à discussão. Contudo, usam abordagens diferentes nesse convite, já que em algumas situações dirigem a solicitação à turma e noutras situações a alunos selecionados para essa apresentação. Ana, de forma geral, convida sempre alunos específicos para darem início à apresentação das estratégias de resolução desenvolvidas para cada tarefa, como foi o caso das tarefas *Inscrição no ginásio* e *A família Rosa*. Excecionalmente, na terceira questão da tarefa *Inscrição no ginásio*, dirige o convite à turma, por todos terem recorrido à mesma estratégia. À semelhança de Ana, Jorge também direciona o convite a todos os alunos, na tarefa *Funções e futebol*, solicitando as ilações que podem retirar, possivelmente, pela própria natureza da tarefa (organizada em desafios e explorada com recurso à calculadora gráfica). Acredito que o professor não esperava tipos de resoluções diferentes, já que era suposto que os alunos experimentassem diferentes remates à baliza, a partir das potencialidades da calculadora gráfica.

Na tarefa *A família Rosa*, o convite de Ana para apresentação das resoluções é acompanhado de outro, mas agora a toda a turma, para prestarem atenção ao que vai ser comunicado. Com essa ação, pretende despertar o interesse dos alunos para o estabelecimento de conexões entre a sua resolução e a que vai ser apresentada. As ações de elicitar de Afonso são sempre direcionadas a alunos específicos, contudo com solicitações diferentes, pois nas tarefas *Palitos* e *Inscrição no ginásio*, o professor resume o convite à indicação do grupo que pretende que apresente, enquanto nas tarefas *Cubos com autocolantes* e *Eleição do delegado de turma*, essa incitação segue acompanhada do pedido de explicações para o que vai ser apresentado. Jorge usa as ações de elicitar, nas tarefas *Retângulo num quadrado* e *Eleição do delegado de turma*, com o mesmo propósito de Afonso, contudo, na segunda tarefa ainda acrescenta a indicação do que pretende que seja comunicado.

Ana recorre às *ações de informar* para dar a conhecer o desempenho dos alunos na resolução da tarefa *Cubos com autocolantes* e para indicar as resoluções que serão apresentadas e o que as distingue. Afonso também usa a metodologia de comunicar as diferenças entre as estratégias que serão partilhadas, na tarefa *A cantina da escola*, completando a sua ação com a indicação das semelhanças entre as resoluções. Com esta opção, os professores pretendem despertar o interesse dos alunos para a análise e comparação das estratégias. À semelhança dos seus colegas, Jorge, na tarefa *O retângulo num quadrado*, avisa os alunos do número de resoluções distintas que surgiram na turma e esclarece que nem todos os grupos serão chamados a apresentar dadas as semelhanças entre as resoluções, justificando as estratégias que seleciona para apresentar.

Na tarefa *A família Rosa*, Ana usa as ações de informar para mencionar o número de resoluções diferentes que surgiram na turma e o tipo de estratégia envolvida, assim como Jorge na tarefa *Sacos e bolas*. Nesta tarefa, assim como na tarefa *A cantina da escola*, Ana, participa à turma os grupos que realizam cada tipo de estratégia, com o objetivo de despertar o interesse dos alunos para acompanhar cada uma das explicações e juntar contributos, já que resolveram da mesma forma. Na tarefa *Inscrição no ginásio*, avisa, também, a turma das resoluções diferentes que emergiram nos trabalhos dos alunos, mas ao contrário da sua prática na tarefa *A família Rosa*, nesta não refere os aspetos distintivos entre as resoluções. Afonso também recorre a este tipo de ações nas tarefas *Eleição do delegado de turma* e *Cubos com autocolantes* para introduzir a apresentação de estratégias diferentes.

Na tarefa *A cantina da escola*, as ações de informar de Ana estendem-se a mostrar concordância com os raciocínios apresentados e com as explicações oferecidas, transmitindo confiança aos alunos para os fazer avançar com as suas explicações. Procura também oferecer interpretações para os raciocínios seguidos pelos alunos, em particular no que se refere a alterações de representações matemáticas, referentes a simplificações de escrita, como a omissão do sinal de multiplicação entre um número e uma letra e a substituição do sinal de divisão pelo de fração, esclarecendo as dificuldades que enfrentariam na resolução de uma equação caso não procedessem dessa forma. Afonso também sente necessidade de usar as ações de informar para recordar, os seus alunos, do 7.º ano, de duas formas diferentes para designar metade do número de almoços servidos num certo dia da semana, na tarefa *A cantina da escola*. Na tarefa *Palitos*, as ações de informar de Ana cumprem o objetivo de alertar para o tipo de justificação que não é considerada matematicamente válida, em consequência do tipo de resolução apresentada pelos alunos. Jorge usa estas ações com um objetivo semelhante na tarefa *Funções e futebol*, comunicar o tipo de estratégia que não é aceitável na resolução da tarefa. As ações de informar servem, ainda, a Ana para avisar do passo seguinte no raciocínio que está a ser exposto e para chamar a atenção dos alunos para as prioridades das operações numa expressão numérica. Afonso socorre-se, também, destas ações para sugerir uma interpretação para um raciocínio que está a ser apresentado.

Os professores usam as *ações de desafiar*, essencialmente, para solicitar justificações, clarificações ou explicações (Ana nas tarefas *Palitos*, *Inscrição no ginásio* e *A cantina da escola*; Afonso, nas tarefas *Cubos com autocolantes*, *Inscrição no ginásio* e *A cantina da escola*; e Jorge, nas tarefas *Funções e futebol* e *Sacos e bolas*). Ana recorre, ainda, às ações de desafiar, na tarefa *Inscrição no ginásio*, para incitar os alunos a comparar duas resoluções e fazer previsões para o comportamento de duas funções apoiados nas suas representações gráficas, a partir do oferecimento de um raciocínio para analisarem. Na tarefa *A cantina da escola*, as ações de desafiar permitem a Ana convidar os alunos a relacionar linguagens (matemática e natural); a sintetizar contributos num texto e a responder a questões que lhe eram dirigidas, na tarefa *Palitos*. Afonso apoia-se nas ações de desafiar para levar os alunos a formular conclusões, na tarefa *Inscrição no ginásio*, e a relacionar a resposta ao problema com o conjunto solução da equação escrita, na tarefa *Eleição do delegado de turma*.

Na tarefa *O retângulo num quadrado*, Jorge recorre às ações de desafiar para solicitar interpretações para a simbologia usada pelos alunos na sua resolução e para o raciocínio apresentado; para convidar os alunos a aprofundarem justificações; para oferecer novas estratégias para os alunos analisarem e para solicitar uma interpretação geométrica para uma representação matemática.

Todos os professores recorrem às *ações de apoiar* para levar os alunos a progredir na discussão. Fazem-no através da indicação dada aos alunos de que a sua comunicação corresponde ao esperado (Ana na tarefa *Palitos*, Afonso na tarefa *Inscrição no ginásio* e Jorge na tarefa *Sacos e bolas*) e da repetição de contributos dos alunos (Ana, na tarefa *Palitos*; Afonso, nas tarefas *A cantina da escola* e *Eleição do delegado de turma* e Jorge, nas tarefas *Funções e futebol*, *O retângulo num quadrado* e

Sacos e bolas). Contudo, Ana vê na repetição de argumentos uma forma de levar os alunos a completar ou clarificar alguma ideia e, portanto, quando reitera o contributo do aluno fá-lo sob a forma de interrogação. Já Jorge, com o mesmo propósito, na tarefa *Funções e futebol*, repete o contributo do aluno de forma incompleta, o que proporciona ao aluno voltar a pegar na ideia e apresentá-la agora de forma correta.

Ana, nas tarefas *A família Rosa* e *Palitos*, usa as ações de apoiar para completar contributos dos alunos. Ainda na tarefa *A família Rosa*, socorre-se das ações de apoiar para ajudar os alunos a organizar o raciocínio que pretendem transmitir aos colegas, de modo a que o façam de forma clara, porque verifica durante a sua comunicação a dificuldade que apresentam em cumprir o esperado. Apoia-se nestas ações, sob a forma de questionamento, para orientar os alunos para a apresentação de ideias importantes, nomeadamente, a conexão entre linguagens (matemática e natural) e, na tarefa *A cantina da escola*, para apresentar informação complementar, como o tipo de estratégia seguida. As ações de apoiar são, ainda, usadas por Ana para levar os alunos a sintetizar conclusões importantes com o seu trabalho na tarefa *Inscrição no ginásio*. Na tarefa *Palitos*, estas ações permitem a Ana levar os alunos a fazerem verificações que contribuem para aceitar a validade de uma conclusão estabelecida; focar em argumentos que devem mobilizar na resposta e, ainda, para indicar um raciocínio a seguir.

Para Afonso, as ações de apoiar servem para auxiliar os alunos a justificar raciocínios, através de focar a sua atenção numa ideia que tem potencial e oferecer ideias para analisarem, na tarefa *Cubos com autocolantes*. Esta última ação merece uma reflexão, na medida em que a sua atuação afasta os alunos do raciocínio que estavam a tentar apresentar e leva-os para o raciocínio do professor. É importante que a prática do professor auxilie a participação dos alunos na discussão e na construção de conhecimento matemático, a partir das suas ideias prévias. Mais uma vez, se torna premente refletir sobre os desafios que o professor enfrenta na dinamização da discussão, em particular na condução do discurso, de modo a não sobrepor as suas ideias às dos alunos.

Este professor recorre, ainda, a estas ações para validar respostas, na tarefa *Inscrição no ginásio* e para sugerir ideias para os alunos interpretarem na tarefa *A cantina da escola*. Apoia-se, também, nestas ações para ajudar os alunos a avançar com as suas explicações e para oferecer interpretações para contributos apresentados pelos alunos, na tarefa *Eleição do delegado de turma*. Esta última ação é, também, usada por Jorge na tarefa *O retângulo num quadrado* e a primeira na tarefa *Funções e futebol*.

Jorge utiliza as ações de apoiar na tarefa *O retângulo num quadrado*, para solicitar um aluno distinto do que está a apresentar a resolução no quadro para corrigir ideias introduzidas ou completar afirmações do professor e para recordar o objetivo da tarefa, assim como na tarefa *Funções e futebol*. Ainda na tarefa do tópico Funções, Jorge, através das ações de apoiar, leva os alunos a interpretar e a sintetizar informação. Apoia-se, também, nestas ações para redizer argumentos dos alunos. Jorge foca aspetos relevantes da comunicação que está a ser feita ou sugere interpretações para uma resolução ou ideia apresentada, nas tarefas *Funções e futebol* e *Sacos e bolas*, a partir das ações de apoiar.

Em síntese, a figura 23 mostra que a presença das ações dos professores na sua atuação é diferente. Globalmente, as ações de elicitar são as menos presentes e as de apoiar e de informar as mais presentes na atuação dos professores. Justifico a menor presença das ações de elicitar no discurso, por estarem associadas a um momento específico da discussão – apresentação das estratégias de resolução. Conjeturo a maior presença das ações de apoiar e informar nas ações dos professores Ana e Afonso em consequência das ações de desafiar surgirem cedo na discussão. Ou seja, os professores, numa fase muito inicial da discussão, pretendem levar os alunos a justificar, explicar ou clarificar raciocínios, recorrendo para tal às ações de desafiar, apoiando-se, fundamentalmente, nas ações de apoiar para ajudar os alunos a alcançar o pretendido. Jorge também se socorre destas ações para auxiliar os alunos a justificar, explicar ou clarificar raciocínios, no entanto as ações de apoiar são as que estão mais presentes na sua atuação e as de desafiar surgem em segundo lugar. Induzo esta atuação, pelo facto de Jorge recorrer às ações de informar apenas para alertar os alunos para reconhecer estratégias de resolução distintas ou semelhantes e para justificar as resoluções que escolhe para apresentação no momento de transição da apresentação para a comparação e avaliação; e comunicar o tipo de resolução que não é considerado válido já na fase de comparação e avaliação de estratégias. Ana e Afonso também se apoiam nas ações de informar para avisar os alunos da introdução de estratégias de resolução diferentes ou semelhantes, na comparação e avaliação. No entanto, Ana completa a sua ação com outras que favorecem o progresso dos alunos na discussão, em particular, dando a conhecer aos alunos a sua posição relativamente às explicações oferecidas, o que contribui para os ajudar a atingir o propósito definido. A sua ação de informar os alunos sobre os passos a seguir na resolução de um problema e de comunicar a possibilidade de usar representações diferentes para a mesma informação, à semelhança de Afonso, fomenta o envolvimento dos alunos na conclusão da discussão. É ainda característica da prática de Ana informar a turma do seu desempenho perante a resolução de uma tarefa, assim como mencionar os tipos de estratégias emergentes e os grupos que as realizaram. Com esta atuação pretende despertar o interesse dos alunos para acrescentarem contributos, já que pensaram da mesma forma.

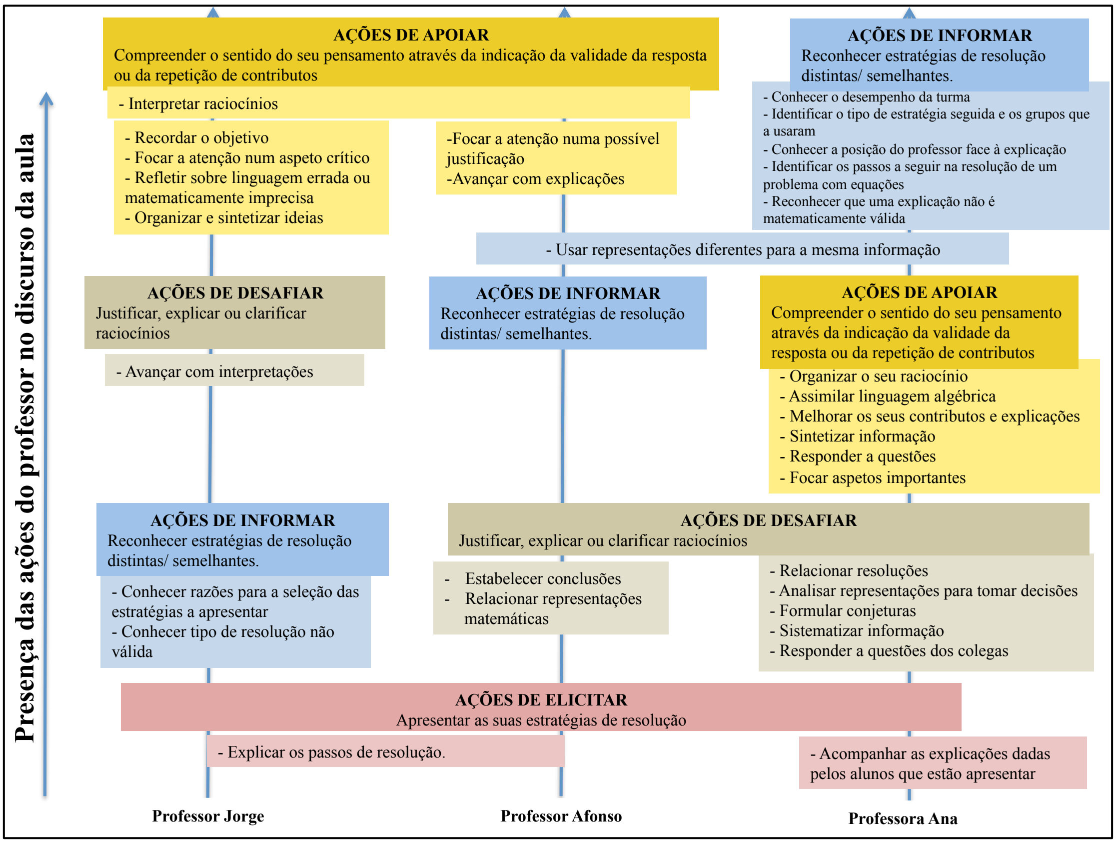


Figura 23: Dinamização da discussão – Ações de ensino.

Conhecimento didático mobilizado e emergente das discussões coletivas

Os professores do estudo preparam e dinamizam discussões coletivas apoiados no seu conhecimento didático, nas suas diversas vertentes: conhecimento da Matemática; conhecimento da prática letiva; conhecimento do currículo e conhecimento dos alunos e da aprendizagem. Embora as vertentes do conhecimento do professor sejam analisadas, agora, de forma isolada, de modo a salientar a sua presença na prática dos professores, em sala de aula são mobilizadas na sua ação de forma integrada, apoiando-se e fortalecendo-se mutuamente.

A convocação das diversas vertentes do conhecimento não é igual para todos os professores nem para os dois grandes momentos de preparação e dinamização da discussão. Especificamente, o conhecimento da Matemática está presente nos dois momentos da discussão (preparação e dinamização) para os três professores, enquanto o conhecimento do currículo é mais expressivo nas atuações dos professores nas fases de preparação da discussão e, em particular, na seleção de tarefas e definição do propósito da discussão para essas tarefas. Na verdade, os professores escolhem tarefas que estejam de acordo com os conteúdos programáticos que estão a ser abordados no momento em sala de aula. Os professores mostram, também, um bom conhecimento das orientações curriculares em termos de ideias importantes a alcançar pelos alunos, como a generalização de relações matemáticas. Este objetivo de aprendizagem é definido para o trabalho dos alunos em todas as tarefas. É notória a expressividade do conhecimento da Matemática para a promoção de discussões, como suporte à atuação do professor. Já o conhecimento do currículo é pouco expressivo, sendo chamado pelos professores à sua prática muito pontualmente, restringindo-se à fase de preparação da discussão coletiva antes da aula.

Focando o *conhecimento da Matemática*, os professores apoiam-se neste conhecimento antes da aula, na identificação dos conceitos, objetivos e procedimentos matemáticos presentes nas tarefas selecionadas, na antecipação de possíveis dificuldades dos alunos no trabalho com as diversas tarefas, na previsão de estratégias a apresentar pelos alunos e face a essas resoluções na escolha de quais levar à discussão e na conjetura sobre a melhor forma de encadear as estratégias selecionadas para apresentação.

Em sala de aula, recorrem ao conhecimento da Matemática na identificação dos conceitos e dos procedimentos matemáticos envolvidos nas resoluções dos alunos e generalizações feitas, na seleção de estratégias de resolução que recorrem ao uso de diferentes tipos de representações (algébrica e não algébrica) e na organização das intervenções dos alunos, com vista à promoção da generalização de ideias algébricas. Na condução do discurso, os professores socorrem-se deste conhecimento para avaliar as explicações, justificações e argumentações oferecidas pelos alunos; o rigor da linguagem matemática, assim como para promover a conexão de representações e linguagens e para oferecer interpretações para raciocínios dos alunos ou introduzir argumentos para os alunos analisarem. Esta vertente do conhecimento didático é, ainda, fundamental no caso de Jorge no reconhecimento da validade das resoluções realizadas pelos alunos e não antecipadas no grupo colaborativo. Neste caso, este tipo de conhecimento é, ainda, suportado pelo conhecimento dos alunos e da aprendizagem, uma vez que o professor tem que decidir se é benéfico para a aprendizagem dos alunos a inclusão dessa estratégia na discussão e qual o melhor momento do discurso para o fazer, de forma a não comprometer o propósito da discussão.

O *conhecimento dos alunos e da aprendizagem* é usado pelos professores na antecipação das estratégias a apresentar pelos alunos, uma vez que a sua previsão tem sempre em conta o conhecimento que têm dos seus alunos, embora por vezes sejam surpreendidos em sala de aula com outras resoluções, como aconteceu com Jorge. Este conhecimento é também útil a este professor, em sala de aula, no desafio que lança aos alunos com uma atitude mais positiva face à Matemática para procurarem outras estratégias para além das já realizadas, de forma a desenvolverem o seu raciocínio. O professor sente-se confortável com essa postura, em virtude da preparação individual que faz da aula. Encontra nessa prática uma forma de lidar com a heterogeneidade dos alunos, mantendo-os sempre envolvidos na aula e respeitando os seus interesses e características. Contudo, a introdução dessas novas estratégias na apresentação coletiva é muito ponderada pelo professor, já que acredita que só devem ser partilhadas se envolverem raciocínios mais simples relativamente aos mobilizados noutras resoluções já apresentadas e se forem acessíveis à globalidade dos alunos.

Esta vertente do conhecimento suporta a atuação dos professores na organização das intervenções dos alunos, já que defendem a transição da linguagem matemática informal para a formal, perante as representações usadas pelos alunos nas suas resoluções. Jorge encontra, ainda, neste tipo de conhecimento força para justificar a sua opção para começar pelas estratégias menos poderosas do ponto de vista formal – desenvolvidas, geralmente, pelos alunos com mais dificuldades. Estes alunos sentem-se, assim, valorizados e reconhecem que podem dar um contributo importante à aula de Matemática. Jorge transmite, assim, confiança aos alunos e contribui para que estes desenvolvam uma atitude mais positiva face à disciplina.

No caso de Ana, esta vertente do conhecimento é também significativa na fase de seleção das tarefas a apresentar aos alunos, uma vez que a professora tem ideias muito claras quanto ao que considera serem tarefas adequadas aos seus alunos – tarefas que não sejam demasiado abertas e que não se afastem muito do tipo de trabalho habitual dos alunos. Acredita que só assim os pode ter envolvidos na sua resolução. Apoia-se também neste conhecimento no momento de acompanhamento às estratégias de resolução realizadas em sala de aula, na identificação das razões para as dificuldades que os alunos enfrentam em interpretar e explicar uma expressão para o termo geral de uma sequência. Para os outros professores é, também, importante no suporte às tarefas escolhidas, já que consideram que para envolver os alunos em discussão devem escolher tarefas desafiantes e que admitam várias estratégias de resolução. Este tipo de conhecimento é, ainda, necessário para apoiar os professores a pensarem na melhor forma para apresentar as tarefas aos alunos, decidindo iniciar pelas que promovem a sua atividade matemática e que funcionam como motor ao trabalho na tarefa seguinte. O conhecimento dos alunos e da aprendizagem em interligação com o conhecimento da Matemática é, também, fundamental na previsão e identificação das dificuldades dos alunos no trabalho com as tarefas propostas.

O *conhecimento da prática letiva* é mais relevante na prática dos professores na dinamização da discussão em sala de aula, essencialmente, na forma como os professores organizam a discussão e promovem o discurso e nas ações que desempenham para o sucesso da discussão. É visível na apresentação das resoluções, através da escolha dos alunos para dar início à discussão, e na continuidade, pela forma como focam a atenção dos alunos em raciocínios que precisam ser analisados e os levam a melhorar justificações, clarificar explicações, relacionar linguagens e representações, e a interpretar e avaliar raciocínios até sistematizarem os principais contributos.

Esta vertente do conhecimento é mais expressiva na atuação dos professores no que respeita à promoção da comunicação efetiva entre os alunos. Contudo, é também importante na fase de preparação da discussão, quando os professores pensam na forma como vão promover essa comunicação – seleção e sequenciação das estratégias de resolução. Este tipo de conhecimento é menos expressivo no momento de escolha das tarefas, sendo, no entanto, útil para os professores aquando da definição do modo de trabalho dos alunos mais adequado para a resolução de cada tarefa.

O conhecimento didático dos professores sai reforçado com a sua participação no grupo colaborativo, fruto de todas as reflexões mantidas e experiências letivas implementadas e partilhadas. Especialmente, no caso de Ana, a vertente do conhecimento da prática letiva é fortalecida, com as aprendizagens que realiza acerca da importância da fase de antecipação de estratégias de resolução a apresentar pelos alunos para o sucesso da condução da discussão em sala de aula. O conhecimento da prática letiva também é aprofundado no caso de Jorge, ao reconhecer a influência da antecipação da seleção e sequenciação das estratégias a apresentar em coletivo para conseguir envolver os alunos na promoção da linguagem algébrica, já que este professor na sua prática letiva anterior promovia a discussão em função das respostas aleatórias dos alunos. O robustecimento desta vertente do conhecimento é influenciada por um recurso externo – análise do texto *Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios,* de Paula Canavarro (2011), refletido na segunda sessão de trabalho conjunto, sobre algumas práticas a ter em atenção na orquestração de discussões coletivas.

A vertente do conhecimento do currículo nos professores Ana e Afonso também sai fortificada, já que a sua prática de dinamização de discussões coletivas confirma o que acreditam ser a melhor abordagem dos temas das Sequências e regularidades, Funções e Equações. Para Ana, é evidente que o trabalho dos alunos com as Sequências e regularidades deve preceder o das Funções e para Afonso, o trabalho com as Sequências e regularidades deve anteceder o das Equações, na medida em que os alunos ao verificarem a pertença de um termo a uma sequência resolvem intuitivamente uma equação. Para este professor, este trabalho é fundamental para a aquisição com compreensão dos passos a seguir na resolução de uma equação. Já Ana confirma a sua conjetura ao verificar que os alunos recorrem aos seus conhecimentos de sequências na resolução das tarefas envolvendo funções. Esta professora reafirma, ainda, no trabalho com as Sequências e regularidades o que considera potenciar a escrita com compreensão da expressão para o termo geral de uma sequência – iniciar a exploração com sequências pictóricas, evoluindo, posteriormente, para as numéricas.

Globalmente, a figura 24 evidencia que as vertentes do conhecimento didático mobilizadas pelos professores durante a preparação da discussão coletiva são muito semelhantes, o que pode ser justificado pelo trabalho realizado no grupo colaborativo. Na fase de dinamização da discussão, as vertentes do conhecimento chamadas pelos professores nas suas atuações apresentam já algumas particularidades.

A prática dos professores na preparação e dinamização de discussões é apoiada pelo seu conhecimento da Matemática, não querendo afirmar que este é o conhecimento mais importante da atuação dos professores, mas é sem dúvida um conhecimento fundamental para a sua prática. Não pretendo inferir que esta vertente do conhecimento é a mais determinante na prática de orquestrar discussões, mas é a que está por detrás de toda a atuação do professor, sendo uma vertente que está subjacente às outras. O conhecimento da Matemática tem um impacto assinalável na prática de Jorge, na medida em que é esse tipo de conhecimento que o leva a investir na procura individual de mais estratégias de resolução, para além das antecipadas no grupo colaborativo. É também este conhecimento que lhe permite reconhecer estratégias novas que emergem nos trabalhos dos alunos. A inclusão dessas estratégias na discussão é apoiada pelo conhecimento dos alunos e da aprendizagem.

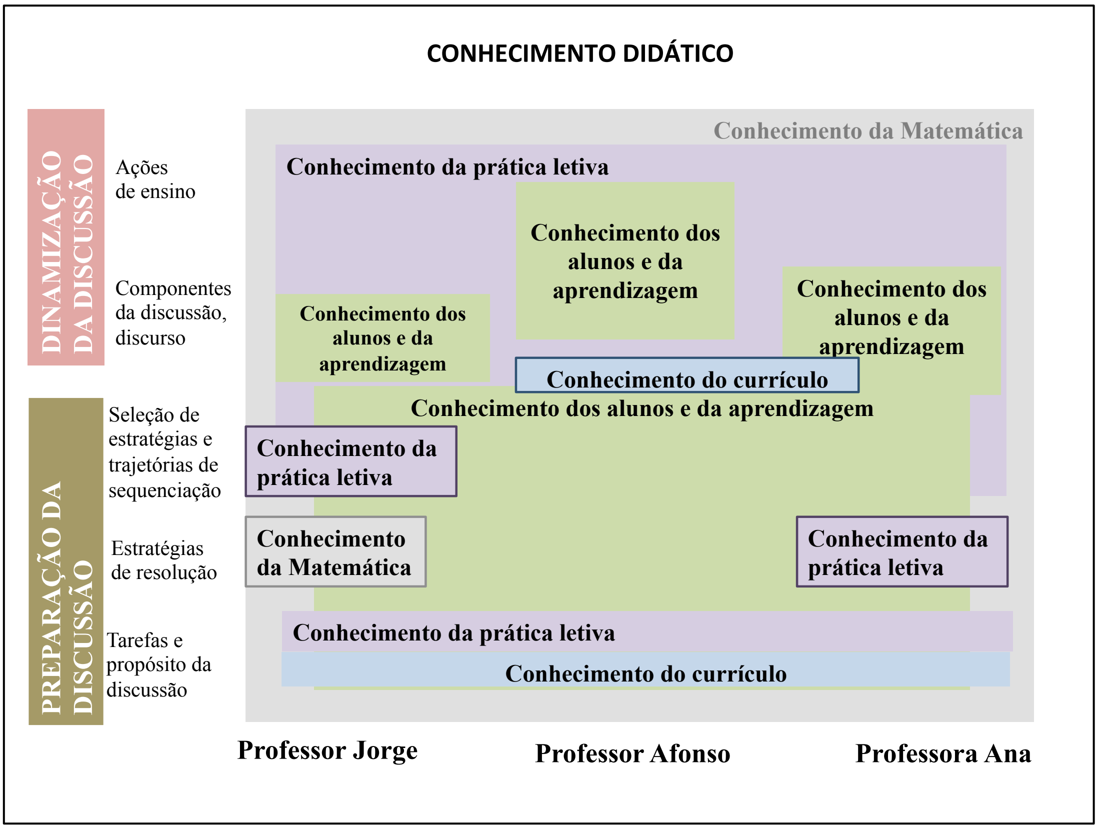


Figura 24: Conhecimento didático mobilizado e emergente das discussões.

Contrariamente às outras vertentes do conhecimento, a vertente do conhecimento do currículo é mobilizada pelos professores, especialmente, na fase de preparação da discussão antes da aula, embora saia reforçada no caso de Ana e Afonso com as suas práticas de sala de aula, ao confirmarem abordagens curriculares mais compatíveis com a promoção da aprendizagem da Álgebra.

A vertente do conhecimento da prática letiva é mais expressiva na atuação dos professores nos momentos de escolha das tarefas e na dinamização da discussão em sala de aula. É este tipo de conhecimento que lhes permite selecionar as tarefas mais ajustadas à promoção de discussões e organizar em sala de aula a discussão, por forma a promover a comunicação matemática, levando os alunos a interpretar, justificar, explicar e argumentar sobre diversos raciocínios. O conhecimento da prática letiva sai fortalecido, na fase de preparação da discussão, no caso dos professores Jorge e Ana, por influência de um conhecimento externo, proporcionado pela leitura e discussão de um texto relativo à dinamização de discussões coletivas.

O conhecimento dos alunos e da aprendizagem é também determinante na atuação dos professores, quer na fase de preparação da discussão, quer na fase de dinamização em sala de aula, funcionando, à semelhança do conhecimento da Matemática, como um suporte das ações e decisões tomadas pelos professores.

A prática destes professores evidencia as vertentes do conhecimento da Matemática e dos alunos e da aprendizagem como suportes à sua atuação, o conhecimento do currículo convocado de forma mais isolada na orquestração da discussão e as vertentes do conhecimento da prática letiva como a mais expressiva das suas condutas, o que salienta a promoção da comunicação matemática determinante numa discussão.

Síntese final

A dinamização de discussões coletivas é um desafio exigente e complexo, como evidencia a prática destes três professores. Dada a natureza colaborativa do trabalho realizado, a prática dos três professores relativamente à preparação da discussão antes da aula é muito semelhante, embora se possam destacar algumas particularidades, justificadas pelos conhecimentos e/ou perspetivas de cada professor, como mostra a figura 25.

Jorge aposta, essencialmente, em problemas, por acreditar que são potenciadores do envolvimento dos alunos em discussões coletivas, privilegiando para esses problemas a estratégia algébrica, embora também considere a estratégia por tentativa e erro. A preferência pelas estratégias algébricas é enriquecida pelo seu trabalho de preparação individual, complementar ao realizado no grupo colaborativo, ao favorecer a antecipação de mais estratégias de resolução para além das já previstas com os colegas. Esse trabalho é importante para a sua atuação em sala de aula, levando-o a desafiar os alunos a procurarem estratégias algébricas adicionais às já conseguidas, ou a convidar os alunos, durante a discussão coletiva, a pensarem em novas resoluções, para além das apresentadas. Este tipo de ação contribui para o enriquecimento do seu conhecimento da Matemática e da prática letiva, apoiado pelo que conhece dos seus alunos e no que acredita proporcionar aprendizagem aos alunos – conhecimento dos alunos e da aprendizagem.

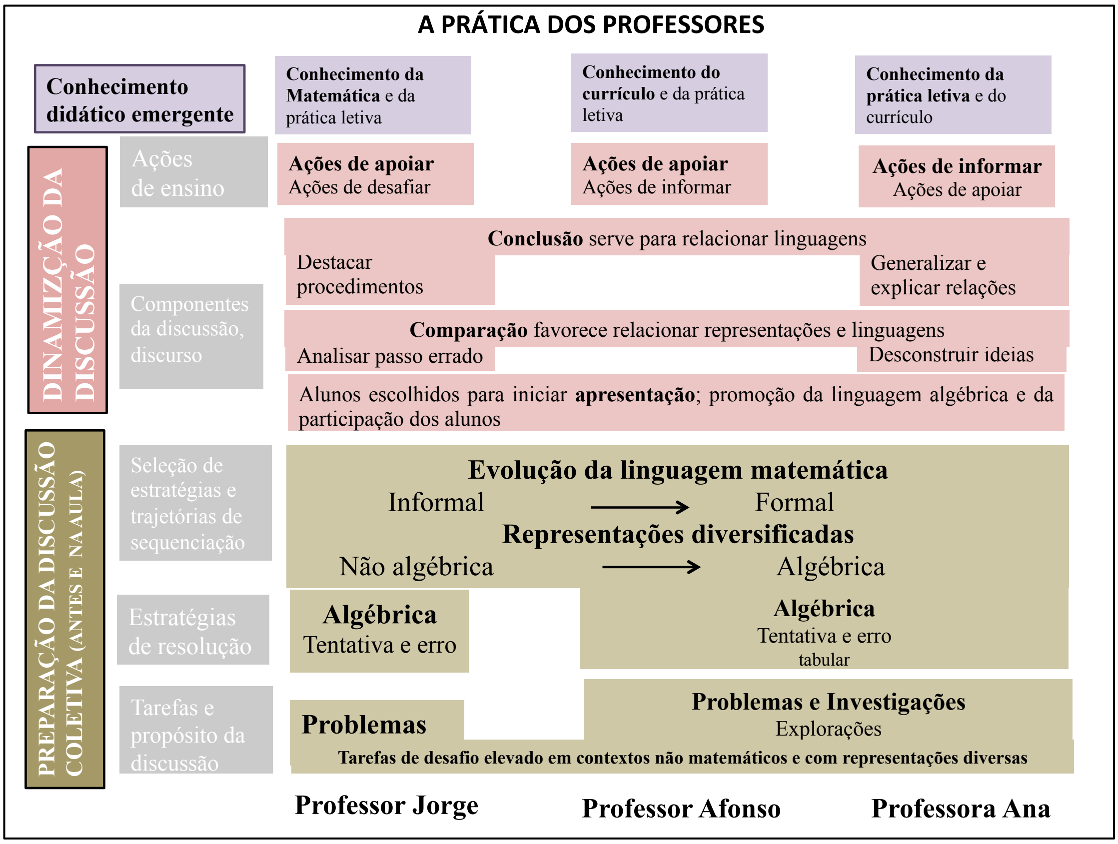


Figura 25: A prática dos professores – um olhar sobre a discussão coletiva.

Jorge usa a análise de erros como promotora da discussão coletiva. Envolve os alunos através da solicitação de diversas justificações para esse erro. Reconhece nessa situação oportunidade para alertar os alunos para a importância do rigor da linguagem matemática. Para concretizar as suas intenções, as ações de desafiar são determinantes, mas precisam ser acompanhadas pelas de apoiar, como forma de auxiliar e animar os alunos a progredir com o seu trabalho. Jorge usa a conclusão da discussão, essencialmente, para destacar procedimentos que visam colmatar falhas identificadas durante o trabalho autónomo dos alunos, como os procedimentos a seguir na resolução analítica de uma questão e os passos a realizar na resolução de uma equação.

Ana aposta em tarefas mais diversificadas, mas sempre de acordo com o que considera ser imprescindível numa tarefa – não muito aberta e próxima do tipo de trabalho habitual dos alunos. Privilegia as estratégias por tentativa e erro, tabular e algébrica nas resoluções dos alunos, procurando envolvê-los na partilha de ideias através da transição da linguagem matemática informal para a formal.

Ana vê na discussão uma oportunidade interessante de desconstruir ideias, relacionados com a temática das sequências. Este tema revela também a sua importância para as conclusões em que a professora envolve os alunos, nomeadamente, na generalização e explicação de relações matemáticas com compreensão, ou seja, através da conexão entre os conceitos de termo e ordem, conseguido com a exploração de sequências pictóricas. Para o desenvolvimento desta compreensão, usa ações de apoiar no auxílio dado aos alunos para os orientar para tais generalizações. As ações de informar, como comunicar à turma o seu desempenho, mencionar o tipo de estratégias conseguidas e os grupos que as realizaram, assim como valorizar as resoluções feitas, devolver à turma as questões que lhe são dirigidas ou incentivar os alunos a interrogar os colegas, são ações particularmente relevantes na sua atuação. As discussões promovidas em sala de aula com as tarefas relacionadas com sequências contribuem para o aprofundamento do seu conhecimento do currículo, o mesmo acontecendo com as tarefas relacionadas com as funções ao evidenciar a mobilização de conhecimentos prévios de sequências no trabalho com as funções.

Afonso aposta em tarefas diversificadas, que mobilizam estratégias de resolução também diferentes. Leva os alunos a participarem na discussão transitando da linguagem matemática informal para a formal. Para alcançar esse propósito, recorre, essencialmente: às ações de apoiar sob a forma de repetir contributos, redizer linguagem, completar uma ideia ou reforçar um argumento; e às ações de informar, sob a forma de alertar os alunos para a apresentação de estratégias diferentes, mencionar as diferenças entre as estratégias e prevenir os alunos para alterações de representações.

Afonso dá grande importância à promoção da linguagem (matemática e não matemática) nas discussões coletivas que conduz, focando a comparação de estratégias e a conclusão da discussão nas conexões entre linguagens matemática e não matemática. A condução das discussões envolvendo as tarefas sobre sequências favorece o seu aprofundamento do conhecimento do currículo, ao refletir que os alunos para verificarem a pertença de um termo a uma sequência recorrem às operações inversas, ou seja resolvem equações por compreensão.

A prática destes três professores mostra que, apoiados no seu conhecimento didático, preparam cuidadosamente a discussão coletiva, selecionando tarefas diversificadas para aos seus alunos, antecipando as estratégias de resolução por tentativa e erro, tabular e algébrica para o trabalho dos alunos com essas tarefas e prevendo envolver os alunos no discurso da aula através da transição da linguagem matemática informal para a formal. Em sala de aula, dinamizam a discussão de acordo com o antecipado, mas incorporando na discussão as ideias produtivas que emergem na partilha coletiva. Dão início à discussão com os alunos que escolhem para apresentar as suas estratégias de resolução, continuam a partilha levando os alunos a comparar ideias com o objetivo de relacionar linguagens e representações, que são, posteriormente, sistematizadas em coletivo. Os professores recorrem durante a dinamização da discussão a quatro tipos de ações de ensino: apoiar, informar, desafiar e elicitar.

CAPÍTULO XI

Conclusão

Neste capítulo, organizado em quatro secções, procuro responder às questões do estudo e apontar pistas para estudos futuros. Na primeira seção, retomo as linhas gerais do estudo, reforçando as motivações que o desencadearam, assim como o objetivo e as questões; na segunda secção, respondo às questões do estudo, na terceira, apresento questionamentos que podem originar novos estudos e, na última, faço uma breve reflexão final sobre todo o percurso.

Retomando o estudo

O interesse pelo estudo das discussões matemáticas coletivas decorre das potencialidades reconhecidas nesta abordagem metodológica como promotora da aprendizagem dos alunos, ao favorecer o seu envolvimento na apresentação das estratégias produzidas para a resolução de tarefas propostas pelo professor, na ponderação e avaliação dessas estratégias, através da justificação e argumentação sobre os raciocínios mobilizados, e na sistematização das conclusões estabelecidas e do conhecimento matemático emergente.

A promoção das discussões matemáticas em sala de aula é um desafio exigente e complexo para o professor, difícil de ultrapassar de forma isolada. Por isso, este estudo apostou numa dinâmica de trabalho colaborativo com três professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico, com o propósito de compreender como esse grupo de professores prepara e dinamiza discussões coletivas desencadeadas por tarefas matemáticas, visando o ensino de Álgebra. Para isso, estudei a atuação dos professores durante a preparação da discussão coletiva (a que ocorre antes da aula e a que acontece durante a aula) e na dinamização da discussão em sala de aula. Com a preparação antes da aula, fico a conhecer as tarefas que os professores selecionam para promover o envolvimento dos alunos na discussão e o propósito que definem para essa discussão; as estratégias de resolução que antecipam para o trabalho dos alunos com essas tarefas e quais escolhem para apresentar em coletivo, assim como a ordem que preveem para essa apresentação. Como nem tudo pode ser previamente pensado pelos professores, a preparação da discussão continua em sala de aula, durante o acompanhamento ao trabalho autónomo dos alunos, onde o professor identifica as estratégias efetivamente utilizadas pelos alunos e face às suas resoluções decide as que têm potencial para partilhar e a melhor ordem para chamar os alunos a apresentá-las. O estudo foca igualmente a dinamização da discussão, de modo a conhecer a forma como os professores organizam a discussão e como promovem a comunicação entre os alunos, através das ações de ensino que realizam para alcançarem essa finalidade.

De forma integrada, o estudo foca o conhecimento didático relativo à dinamização de discussões matemáticas coletivas que os professores convocam na sua prática e se materializa nas suas ações de ensino.

Para atingir este propósito, procuro responder às seguintes questões:

- De que forma os professores preparam a discussão coletiva, antes e durante a aula, tendo em vista o ensino da Álgebra?
- Como é que os professores organizam a discussão coletiva em sala de aula e como promovem o envolvimento dos alunos nessa discussão?
- Quais as ações de ensino que os professores implementam na condução da discussão, como se articulam e que propósitos têm em vista?
- Como é que os professores desenvolvem e mobilizam o seu conhecimento didático relativo à preparação e dinamização da discussão coletiva visando o ensino da Álgebra?

Conclusões do estudo

1. De que forma os professores preparam a discussão coletiva, antes e durante a aula, tendo em vista o ensino da Álgebra?

De forma a compreender melhor a prática dos professores na preparação da discussão coletiva antes e durante a aula, foco as tarefas que eles selecionam para promover o envolvimento dos alunos na discussão, olhando para a natureza, para o nível de desafio, para o contexto e para as representações que suscitam no trabalho dos alunos com essas tarefas. Destaco, também, o propósito definido pelos professores para a discussão que pretendem dinamizar em sala de aula sobre tarefas algébricas, analisando os conceitos matemáticos que pretendem discutir com os alunos e objetivos específicos a alcançar com essa discussão e como pretendem levar os alunos a generalizar ideias algébricas. Este primeiro tema, é analisado, essencialmente, na fase antes da aula; os restantes são analisados nas fases antes e durante a aula. A preparação da discussão continua com a antecipação de possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos e a identificação das estratégias realmente usadas em sala de aula, focando a estratégia por tentativa e erro, tabular e algébrica. Seguidamente, olho para a prática dos professores na seleção e sequenciação das estratégias de resolução dos alunos, quer na fase de antecipação quer em sala de aula. A seleção das estratégias é apoiada nas representações previstas para o trabalho dos alunos e efetivamente usadas no seu trabalho e a sequenciação antecipada e implementada em sala de aula é suportada pelo tipo de linguagem matemática usada pelos alunos nas suas resoluções.

Tarefas e propósito da discussão. Os professores preparam a discussão coletiva antes da aula, começando por selecionar cuidadosamente as tarefas que pretendem apresentar aos seus alunos. Essas tarefas têm que implicar os conteúdos que pretendem ensinar e reunir um conjunto de características que os professores consideram imprescindíveis. Assim, quanto à *natureza* e nível de *desafio*, os professores privilegiam: *i)* tarefas não muito abertas e próximas do trabalho habitual dos alunos; *ii)* tarefas com enunciados claros; *iii)* tarefas com um nível de exigência superior; *iv)* tarefas que permitam proporcionar experiências diversificadas aos alunos; *v)* tarefas que favoreçam a emergência de diferentes estratégias de resolução; e *vi)* tarefas desafiantes e que espoletem a curiosidade dos alunos. Também Ponte e Quaresma (2015), sublinham que as discussões matemáticas são alimentadas por tarefas desafiantes que admitam diversas estratégias de resolução por parte dos alunos.

A atividade dos professores na preparação da discussão coletiva, em particular, na seleção das tarefas, faz emergir mais duas características para a escolha das tarefas, para além das identificadas anteriormente: *i)* tarefas para colmatar dificuldades dos alunos identificadas no trabalho com os tópicos Sequências e regularidades, Funções e Equações; e *ii)* tarefas para ampliar as experiências de aprendizagem proporcionadas aos alunos em ciclos de ensino anteriores. Concretamente, os professores ao escolherem as tarefas *A cantina da escola*, *A família Rosa*, *Eleição do delegado de turma* e *Sacos e* *bolas* para abordar o tópico Equações têm como objetivo ajudar os alunos a traduzir informação de linguagem natural para linguagem matemática e a lidar melhor com situações que impliquem mudança de uma quantidade de um lado para o outro, já que identificam, em práticas letivas anteriores, dificuldades dos alunos neste tipo de trabalho. As tarefas que selecionam para o estudo das Funções (*Inscrição no ginásio* e *Funções e futebol*) pretendem favorecer a interpretação dos parâmetros envolvidos nas expressões das funções linear e afim e a atribuição de significado a esses parâmetros, relacionando com os conceitos de declive e de ordenada na origem, a partir de situações do interesse dos alunos. O uso que os professores fazem da situação da tarefa para apoiar a interpretação e a explicação de raciocínios é também apontado por Cengiz (2013) como uma ação de ensino que foca os alunos na Matemática que está a ser discutida. As tarefas privilegiadas para o tópico Sequências e regularidades têm como propósito ampliar as experiências anteriores dos alunos e trabalhar a sua comunicação matemática, na vertente da interpretação e expressão.

Os problemas foram as tarefas mais valorizadas pelos professores para a promoção de discussões coletivas, afigurando-se neste estudo como tarefas capazes de conciliar de forma harmoniosa todas as características que os professores consideram que uma tarefa deve apresentar (anteriormente apontadas) e responder aos diferentes interesses dos alunos em sala de aula, por admitirem diversas possibilidades de resolução.

No que respeita ao *contexto* das tarefas, os professores optaram por tarefas envolvendo contextos diversificados e não matemáticos e em que os pedidos surgem aos alunos num nível de complexidade crescente, de forma a evitar que desistam ou apostem apenas por estratégias informais para a sua resolução. Por exemplo, a tarefa proposta para o 8.º ano (tarefa *Funções e futebol*) beneficia do contexto escolhido apelar ao uso da calculadora gráfica e ser do interesse dos alunos. Esta tarefa vem responder ao interesse pessoal de Jorge pela tecnologia, mas, fundamentalmente, porque o seu conhecimento resultante da sua prática letiva anterior mostra que esse contexto favorece a autonomia dos alunos e a partilha de ideias.

Estas tarefas que os professores selecionam para apresentar aos alunos seguem em linha com as ideias defendidas por Clayton (2014) para fomentar discussões, como apresentar problemas significativos com contextos relevantes, que admitam diversas estratégias de resolução, promovam o raciocínio, levem à justificação e envolvam conceitos matemáticos importantes.

Em termos das *representações* sugeridas nas diversas tarefas, os professores procuram que as tarefas propostas aos alunos promovam a sua autonomia no uso de representações. Assim, começam por apresentar tarefas mais abertas (investigações e explorações), mas mais organizadas em termos de pedidos a fazer aos alunos (várias questões encadeadas) e com indicação da representação a usar, e avançam para tarefas mais fechadas (problemas) e organizadas num único pedido sem indicação da representação a usar. Encontram nesta atuação um meio para promover a criatividade dos alunos nas resoluções a apresentar e melhorar a qualidade da discussão.

Selecionadas as tarefas a propor aos alunos, os professores continuam a preparação da discussão definindo o propósito que pretendem alcançar com ela. Para os professores do estudo, a participação dos alunos na discussão tem que contribuir para o estudo dos *conceitos matemáticos* e dos *objetivos específicos* relacionados com os conteúdos que estão abordar em sala de aula e para a *generalização* de relações matemáticas relacionadas com esses conceitos. Ou seja, a discussão deve permitir levar os alunos a escrever, interpretar e explicar diversas expressões para o termo geral de uma sequência e da expressão das funções afim e linear, assim como escrever diferentes equações para a mesma tradução de informação de linguagem natural para matemática, comparando o conjunto solução da equação com a resposta ao problema.

Estratégias de resolução. Os professores dão continuidade à preparação da discussão antes da aula, antecipando as estratégias por tentativa e erro, tabular e algébrica, como os tipos principais de resoluções a apresentar pelos alunos. A *estratégia tabular* é assumida, globalmente, como uma forma de os alunos organizarem as suas tentativas, sendo prevista de forma independente apenas na tarefa *Inscrição no ginásio*.

Os professores preveem a estratégia por tentativa e erro para todas as tarefas, embora com características diferentes, de acordo com cada tarefa e com o tópico em estudo: nas sequências surge na escrita de todos os termos da sequência, apoiada em raciocínios recursivos; nas funções, é identificada em experimentações arbitrárias na calculadora gráfica (tarefa *Funções e futebol*) e em raciocínios recursivos (tarefa *Inscrição no ginásio*); e nas equações, a partir de experiências que iniciam num número redondo.

A estratégia algébrica é antecipada pelos professores para todas as tarefas, pois é essa que contribui de forma mais marcante para o objetivo definido para a discussão. Contudo, defendem a generalização com compreensão, ou seja, que estabeleçam expressões para o termo geral de uma sequência, a partir da análise do padrão que configura a imagem e sejam capazes de traduzir a mesma informação, apresentada em linguagem natural, de diversas formas em linguagem matemática.

Neste estudo, a forma como os professores perspetivam a generalização e consequente exploração de relações entre diversas expressões para o termo geral de uma sequência é distinta da apresentada no estudo de Larsson e Ryve (2012), onde a conexão entre diferentes expressões é feita pela simples manipulação algébrica, desligada da sequência pictórica subjacente à sequência apresentada.

Nesta fase da preparação da discussão, os professores pensam, ainda, sobre as dificuldades que os alunos podem enfrentar e como os podem ajudar. Identificam obstáculos na tradução de linguagem natural para matemática, como também apontado por Rojano (2002), decidindo que a pista a oferecer consiste em levar os alunos a focarem-se em certas afirmações do enunciado. O envolvimento dos três professores na antecipação de estratégias de resolução que os alunos podem apresentar e de erros que podem cometer nas suas resoluções segue em linha com as ideias defendidas por Clayton (2014) para a preparação da discussão.

Em sala de aula, os professores dão continuidade à preparação da discussão durante o acompanhamento do trabalho autónomo dos alunos. Nessa monitorização, os professores identificam as dificuldades dos alunos e desafiam-nos a procurarem estratégias suplementares, contribuindo, assim, para lidar com diferentes apreciações dos alunos face à Matemática. A estratégia por tentativa e erro é identificada pelos professores como uma resolução muito valorizada pelos alunos, principalmente pelos que têm mais dificuldades. Isto mostra o quanto esta estratégia é importante na aula de Matemática, principalmente para lidar com o abandono dos alunos durante a resolução de uma tarefa. Identificam como principais dificuldades dos alunos escrever e explicar expressões para o termo geral de uma sequência, relacionando ordem e termo; e elaborar representações gráficas que presumam o uso de escalas diferentes. A justificação de generalizações também é apontada por Driscoll (1999) como uma das dificuldades dos alunos no trabalho em Álgebra, como também aconteceu nas aulas destes professores.

Os professores verificam, em sala de aula, a emergência de estratégias não antecipadas o que reforça a importância deste trabalho de preparação da discussão ser completado durante a própria aula. É também durante o acompanhamento ao trabalho autónomo dos alunos que os professores os convidam a investirem noutras estratégias de resolução para além das já usadas. Os professores conciliam este incentivo com as características dos alunos, isto é, desafiam os alunos com uma atitude mais positiva face à Matemática para procurarem estratégias de resolução adicionais. Este tipo de atuação mostra, também, o quanto este trabalho de preparação é pertinente para garantir a produtividade de uma discussão coletiva, na medida em que sem ele a discussão não se tornaria tão rica, principalmente quando as resoluções produzidas pelos alunos são semelhantes, como aconteceu com Afonso, na tarefa *A cantina da escola*.

Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação. Os professores concluem a sua preparação antes da aula pensando numa possível sequenciação para as intervenções dos alunos. A esse respeito, consideram que, face às estratégias previstas, as que podem dar um maior contributo à discussão são as que recorrem a representações diversificadas e levam os alunos a transitar de resoluções que envolvem linguagem matemática informal para a linguagem formal. A prática de antecipação das estratégias a selecionar para levar à discussão coletiva também é defendida por Stein e colegas (2008) e por Clayton (2014), como uma ação importante na preparação da discussão.

Em sala de aula, a preparação da discussão inclui, ainda, a decisão sobre a apresentação das estratégias suplementares desenvolvidas pelos alunos e o melhor momento da discussão para esse acontecimento. Os professores são capazes de incorporar essas novas estratégias na discussão, articulando a sua preparação da discussão antes da aula com a que ocorre em sala de aula, privilegiando a transição da linguagem matemática informal para a formal e juntando critérios de sequenciação novos como evoluir das estratégias mais frequentes para as menos frequentes e das menos complexas para as mais complexas.

Os professores decidem introduzir na sua preparação da discussão as estratégias singulares que surgem na turma, por estas adicionarem contributos novos às outras selecionadas e não por ser mais uma diferente que apareceu nos trabalhos dos alunos. Jorge, defende, ainda, que a inclusão destas estratégias na discussão deve ser muito bem ponderada, na medida em que, na sua opinião, só se justificam se mobilizarem raciocínios compreensíveis à globalidade dos alunos e mostrarem algo de novo face ao já apresentado.

Este estudo mostra o quão é importante a preparação da discussão em sala de aula para o sucesso da condução da discussão, tirando partido da preparação já feita antes da aula. Os resultados aqui apontados seguem em linha com os do estudo de Wagner e colegas (2007) ao destacarem como uma dificuldade à condução de discussões produtivas a não antecipação de respostas dos alunos e como usar essas ideias para promover a sua aprendizagem.

Em síntese, estes três professores escolhem cuidadosamente as tarefas que pretende apresentar aos seus alunos, na medida em que acreditam que a atividade dos alunos e o seu envolvimento na discussão são favorecidos por tarefas próximas do tipo de trabalho habitual dos alunos, não demasiadamente abertas, mas desafiantes, exigentes, com enunciados claros, que admitam diversas estratégias de resolução, que permitam colmatar dificuldades dos alunos e ampliar experiências de aprendizagem anteriores. Assim, privilegiam os problemas como as tarefas que melhor respondem a estes pressupostos e permitem lidar, em sala de aula, com atitudes diferentes dos alunos face à Matemática. Contudo, também propõem aos alunos outras tarefas, como investigações e explorações, tendo em vista diversificar as suas experiências de aprendizagem.

Todas as tarefas apresentadas apostam em contextos variados e não matemáticos, em que as solicitações aos alunos surgem num nível de complexidade crescente e com a indicação da representação a usar. Por forma a desafiar os alunos, promover a sua autonomia e desenvolver a sua criatividade, a indicação da representação a usar vai desaparecendo do enunciado das tarefas ao longo do tempo. O trabalho dos alunos com essas tarefas permite-lhes envolverem-se no estudo de conceitos matemáticos relacionados com os tópicos Sequências e regularidades, Funções e Equações e na generalização de relações estabelecidas para esses conceitos.

Dado que os professores escolhem, intencionalmente, tarefas que possibilitem diversas estratégias de resolução, encontram nas resoluções dos alunos, de acordo com o previsto, estratégias por tentativa e erro, tabular e algébrica. A estratégia por tentativa e erro envolve raciocínios diferentes (recursivos e experimentações de números), de acordo com o tópico matemático em estudo. A estratégia tabular é assumida, essencialmente, como uma forma de organizar as tentativas desenvolvidas pelos alunos. Atendendo a que o contexto deste estudo é a Álgebra, os professores privilegiam a estratégia algébrica, como generalização com compreensão de relações matemáticas. A estratégia por tentativa e erro assume um carácter importante neste trabalho, fundamentalmente como uma estratégia muito valorizada pelos alunos com mais dificuldades e como um meio de enriquecer a discussão. A discussão é, ainda, benfeitorizada com o aparecimento de estratégias não antecipadas pelos professores e por estratégias adicionais apresentadas por diversos grupos de alunos, face ao desafio lançado pelos professores no investimento noutras estratégias. Os professores mostram-se capazes de introduzir as estratégias novas na discussão articulando-as com as restantes, de forma a levar os alunos a analisarem resoluções que mobilizam representações diversas e usam também linguagem matemática diferente. A emergência destas estratégias nas aulas destes professores segue em linha com uma ideia forte apontada por Stein e colegas (2008), que defendem que os professores devem aproveitar a discussão para propor extensões da tarefa em análise.

2. Como é que os professores organizam a discussão coletiva em sala de aula e como promovem o envolvimento dos alunos nessa discussão?

Os professores dinamizam a discussão coletiva em três momentos principais: *i)* apresentação; *ii)* comparação, avaliação e filtragem; e *iii)* conclusão. Durante essa dinamização, os professores orientam o discurso de modo a garantir a discussão de ideias matemáticas importantes e que contribuem para alcançar o foco definido para a discussão.

A discussão começa com o convite a alunos escolhidos intencionalmente para apresentarem as suas estratégias de resolução. A seleção desses alunos tem em conta os critérios promoção da linguagem algébrica seguido do envolvimento dos alunos na discussão. Assim, optam pelas resoluções que recorrem a linguagem matemática informal (estratégias por tentativa e erro) e que surgem de forma mais frequente na turma, para avançarem para as mais potentes do ponto de vista da utilização da linguagem algébrica e terminarem com as resoluções singulares. Ou seja, a escolha das estratégias para apresentação privilegia a progressão da complexidade das ideias matemáticas (representações e conceitos) e segue em linha com a preparação feita pelos professores em sala de aula.

Os professores dão continuidade à apresentação das resoluções dos alunos introduzindo estratégias novas na discussão. Essa inclusão cumpre objetivos bem claros da parte do professor, já que a sua atuação é orientada para atingir o propósito definido para a discussão, apoiando-se na preparação que faz da discussão. Os professores do estudo recorrem, essencialmente, a duas práticas para promover o envolvimento dos alunos na comparação, avaliação e filtragem: incluir estratégias diferentes na apresentação ou acolher um contributo, como um erro ou ideia que merece ser aprofundada, mesmo que seja necessário interromper a apresentação que está a decorrer, como aconteceu com Ana, na tarefa *Palitos*. Este estudo mostra o quanto é importante o professor saber o que valorizar ou deixar cair numa discussão, para seguir uma ideia de um aluno que garanta a produtividade da discussão. A análise de erros foi uma atividade importante nas discussões conduzidas por Jorge e Ana e contribuiu para a construção de conhecimento matemático mais robusto, como também aconteceu com Rosena no estudo de Bray (2011), ao contrário dos seus outros três colegas que não incorporaram o erro na discussão por acreditarem que confundiria os alunos com mais dificuldades, ou por considerarem que deixava os alunos envergonhados. No estudo de Ponte e Quaresma (2016), a análise de erros também foi usada como ponto de partida para a discussão e para fazer emergir diversas justificações, como na aula de Jorge, contrariamente ao que acontece no trabalho de Stein e colegas (2008), onde o professor solicita voluntários para apresentar as suas estratégias, certificando-se de que não iriam alunos com resoluções erradas.

A forma como Jorge encaminha os alunos para a exploração de um passo da resolução da tarefa *Eleição do delegado de turma*, enfatiza a exploração de desacordos (levar os alunos a pensar se há mais de uma resposta correta) como promotoras da compreensão dos alunos, como defende Cengiz (2013).

A atuação dos professores na discussão contribui para desconstruir ideias dos alunos, negociar representações diferentes para a mesma informação, compreender a importância da apresentação das ideias matemáticas com rigor, superar falhas ou dificuldades dos alunos (como o erro típico de assumir a solução da equação como resposta ao problema) e conhecer raciocínios que podem ser desenvolvidos para diferentes tipos de funções (em particular, o recurso à ideia de dobro para a função linear e não para a função afim). Os professores promovem a avaliação dos raciocínios em jogo recorrendo, fundamentalmente, ao questionamento e incentivando a interpelação entre alunos. As interrogações que os alunos fazem uns aos outros evidencia a importância desta atividade numa discussão, como também defendem Bahr e Bahr (2017) e Pirie e Schwarzenberg (1988).

Após uma fase em que os alunos foram convidados a analisar diversas estratégias que mobilizaram diferentes raciocínios, os professores envolvem os alunos na sistematização das principais ideias – conclusão. Essa sistematização ocorre através da generalização de relações matemáticas, do registo de conclusões que traduzam conexões entre representações e linguagens (relação entre designação das funções linear e afim, sua expressão algébrica e sua representação gráfica e interpretação dos parâmetros envolvidos na expressão dessas funções) e do recordar de certos procedimentos matemáticos (conduta a seguir na resolução analítica de uma questão e passos a assumir na resolução de uma equação). Também no estudo de Ponte e Quaresma (2015), a discussão culmina com a professora a levar os alunos a formularem verbalmente a generalização de relações, nesse caso relativas à multiplicação de uma fração por um número natural. A generalização era também nesse estudo um objetivo de ensino, à semelhança desta investigação.

A conclusão da discussão é encarada na prática destes professores como um meio de resolver dificuldades identificadas no trabalho autónomo dos alunos ou como síntese de ideias emergentes na discussão. Mais uma vez, o estudo mostra a importância da conclusão e a intencionalidade colocada nesta etapa da discussão coletiva. A forma como estes professores dinamizam a discussão indica que é possível conduzir discussões em Álgebra que articulem a discussão de ideias matemáticas importantes com símbolos e procedimentos, contrariamente ao apontado por Yerushalmy e Elikan (2010).

As ideias comunicadas pelos alunos e professores na discussão seguem um processo de estreitamento, já que inicia com a introdução de muitas ideias pelo grupo que é escolhido para começar a apresentação da sua resolução para continuar para a análise de um raciocínio particular, como um erro, uma representação, ou uma estratégia nova, que dá origem a uma nova introdução de contributos que vêm esclarecer, justificar, questionar o raciocínio em análise. Este encaminhamento repete-se e culmina na síntese das principais ideias emergentes dessa comunicação. É o foco num raciocínio específico que garante ao professor articular a participação dos alunos na discussão com o conteúdo matemático de ideias importantes.

A atuação dos professores mostra que embora tendo ideias claras do que pretendem que seja apresentado e analisado, lançando o convite a um grupo específico de alunos para abrirem a discussão, o domínio inicial sobre o que vai ser comunicado pelos alunos é menor do que o que conseguem ter a partir do momento que levam os alunos a pensarem sobre raciocínios específicos. Esse rumo garante a discussão de ideias importantes e o alcançar do propósito da discussão.

Em síntese, os professores deste estudo iniciam a discussão coletiva com a escolha dos alunos que pretendem que deem início à partilha de ideias, não deixando essa tarefa nas mãos de alunos voluntários. Com esta atuação, garantem que a discussão decorre de acordo com o rumo que definiram no momento de preparação em sala de aula. Assim, começam a apresentação das estratégias de resolução pelas que recorrem ao uso de linguagem matemática informal e foram realizadas por um maior grupo de alunos, evoluindo para a partilha das estratégias que mobilizam linguagem matemática mais formal, terminando com as que surgem de forma isolada na turma. Os professores apoiam a sua prática de apresentação em dois critérios (tipo de linguagem matemática usada e sua frequência nas resoluções na turma) que na sua perspetiva garantem a promoção da linguagem algébrica e o envolvimento dos alunos no discurso. Os professores dão continuidade à discussão transitando para a comparação, avaliação e filtragem, através da inclusão de estratégias novas na discussão, face às escolhidas para iniciar a partilha, ou da análise de um certo raciocínio matemático que merece ser clarificado (contributo de um aluno ou erro cometido). Com este tipo de atuação, os professores levam os alunos a negociar representações diferentes para a mesma informação, desconstruir certas ideias dos alunos, colmatar dificuldades, alertar para a importância de comunicarem com rigor os seus raciocínios e avaliar e comparar raciocínios. A avaliação das ideias em jogo é promovida através do questionamento professor/alunos e alunos/alunos. A discussão termina com a síntese das principais ideias decorrentes da discussão mantida, relacionadas com dificuldades dos alunos ou ênfase em determinados conceitos matemáticos. A forma como os professores dinamizam a discussão, encaminha os alunos para o estreitamento do discurso, com foco na generalização de certas relações matemáticas.

3. Quais as ações de ensino que os professores implementam na condução da discussão, como se articulam e que propósitos têm em vista?

Na condução da discussão coletiva, os professores apoiam-se em quatro tipos principais de ações de ensino: ações de elicitar, ações de informar, ações de desafiar e ações de apoiar.

As *ações de elicitar* são usadas pelos professores para abrirem a discussão, com o convite que lançam a um grupo de alunos. Essa solicitação é acompanhada de outras muito importantes, como o incentivo à explicação da resolução que está a ser apresentada, a indicação do que deve ser apresentado ou, ainda, o convite a prestarem atenção ao que vai ser mostrado. Este tipo de atuação é consistente com as ideias defendidas por Bahr e Bahr (2017), ao defenderem como estratégia efetiva para a promoção dos alunos na discussão dizer-lhes o que estão a ouvir. Neste estudo, as ações de elicitar surgem associadas ao início da discussão e levam, também, a ações de desafiar, através do pedido de justificações.

As *ações de informar* são utilizadas pelos professores na condução da discussão com o propósito de: dar a conhecer o desempenho dos alunos na resolução da tarefa; indicar o número de resoluções distintas que surgiram na turma e as diferenças e semelhanças entre elas; mencionar os tipos de estratégias usadas pelos alunos e os grupos que realizaram cada tipo; mostrar concordância com o que está a ser apresentado; transmitir confiança aos alunos para progredirem nas suas apresentações; oferecer interpretações para raciocínios introduzidos; recordar conceitos prévios; alertar para justificações matematicamente válidas e comunicar os passos que se seguem na apresentação que está a decorrer.

Os professores recorrem às *ações de desafiar* para: solicitar explicações, clarificações ou justificações aos alunos e interpretações para simbologia usada; e levar os alunos a comparar resoluções, fazer conjeturas, relacionar linguagens, sintetizar contributos, aprofundar justificações e interpretar estratégias oferecidas pelo professor. Também nos estudos de Cengiz e colegas (2011) e Ponte e Quaresma (2016), uma ação de desafiar predominante foi levar os alunos a justificar os seus raciocínios. Os professores, ao centrarem as suas ações de desafiar no pedido de explicações e justificações, em oposição à simples apresentação de um conjunto de procedimentos usados nas suas resoluções, estão a promover o desenvolvimento da autonomia dos alunos, como também defendem Kosko e Wilkins (2015).

As *ações de apoiar* permitem aos professores: dar indicação aos alunos de que estão a corresponder ao esperado; repetir afirmações sob a forma de interrogação ou de modo incompleto; completar contributos; sintetizar informação; focar argumentos; validar respostas; oferecer interpretações e solicitar alunos para corrigir ideias apresentadas pelos colegas; e levar os alunos a organizar ideias para serem comunicadas de forma clara aos seus colegas e aceitar a validade de uma conclusão. Neste estudo, em contraste com o de Cengiz e colegas (2011), os professores, quando pretendem que os alunos clarifiquem ou aperfeiçoem as suas ideias, não se limitam a repetir os argumentos dos alunos. Os professores optam, antes, por retomar esses argumentos de modo incompleto ou sob a forma de interrogação, para dar uma maior oportunidade ao aluno de continuar a investir no raciocínio que estava a realizar, repensando-o. De forma análoga ao estudo de Cengiz e colegas (2011), surgem as ações de apoiar através do oferecimento de interpretações.

À semelhança das ações de elicitar, as ações de apoiar, sob a forma de levar os alunos a organizar ideias para serem comunicadas de forma clara aos seus colegas e aceitar a validade de uma conclusão, indiciam proximidade às ações de desafiar, ao sugerirem envolver o aluno na discussão e atribuírem-lhe responsabilidade pela sua aprendizagem, não deixando essa tarefa somente para o professor.

Este estudo mostra que o tipo de ações empreendidas pelo professor na dinamização das discussões coletivas não pode ser analisado de forma estanque, mas visto na dinâmica que estabelece com a intencionalidade educativa que imprime nessas ações e no propósito que pretende atingir com a mesma, o que significa que uma ação numa situação pode ser de um tipo e noutra situação de outro tipo, dependendo do objetivo que está a visar. Indicia, também, que as ações dos professores emergem na sua atuação de forma direta, como solicitações claras aos alunos do que é pretendido e de forma indireta, quando o professor opta por encaminhar o aluno para o propósito da discussão. Evidencia, também, que o sucesso da condução de uma discussão não é determinada por um tipo principal de ação, mas da articulação dos quatro tipos de ações, como também mostra o estudo de Cengiz e colegas (2011), embora estes autores considerem somente três tipos principais de ações.

Em síntese, os professores recorrem à articulação de quatro tipos principais de ações de ensino para os alunos se envolverem na discussão e para garantir a qualidade do discurso, nomeadamente às ações de elicitar, informar, desafiar e apoiar. Com as ações de elicitar, dão início à discussão convidando um grupo específico de alunos a apresentar a sua resolução. Estas ações são, também, usadas pelos professores para incitar os alunos a acompanhar os raciocínios que são partilhados ou para indicar ao grupo que está a apresentar o que deve ser contemplado na sua exposição. Estas ações, em conjunto com as de desafiar, são convocadas pelos professores no pedido de justificação e explicação dos raciocínios presentes em cada estratégia de resolução. Os professores usam as ações de informar na abertura da discussão e no seu desenvolvimento, com propósitos distintos, em especial, para: dar indicação aos alunos acerca do seu desempenho na resolução da tarefa; mencionar o número de estratégias diferentes que surgiram na turma, o tipo de estratégia e os grupos que as realizaram; salientar semelhanças e diferenças entre as resoluções; mostrar concordância com os raciocínios partilhados; transmitir confiança aos alunos para avançarem com a sua exposição; oferecer interpretações para raciocínios apresentados; recordar conceitos e procedimentos; e alertar para tipos de raciocínios válidos.

As ações de desafiar são chamadas pelos professores em toda a sua prática de dinamização da discussão, nomeadamente, na: solicitação de justificações, explicações e clarificações de raciocínios; comparação de estratégias; elaboração de conjeturas; conexão entre linguagens; sistematização de contributos e interpretação de raciocínios. As ações de apoiar também estão presentes em toda a discussão e dão um contributo muito importante às ações de desafiar, na medida em que através destas ações os professores auxiliam os alunos na elaboração de determinados raciocínios que respondem aos convites lançados pelas ações de desafiar. Os professores recorrem às ações de apoiar para: dar indicação aos alunos de que os seus contributos correspondem ao esperado; repetir afirmações dos alunos de forma incompleta ou sob a forma de interrogação; completar contributos dos alunos; sintetizar informação; focar contributos; validar respostas; oferecer interpretações; solicitar um aluno para corrigir ideias apresentadas; e para ajudar os alunos a organizar ideias.

4. Como é que os professores desenvolvem e mobilizam o seu conhecimento didático relativo à preparação e dinamização da discussão coletiva visando o ensino da Álgebra?

Os professores apoiam a sua preparação e dinamização da discussão coletiva no seu conhecimento didático, já que é este que suporta e define a atuação de cada professor.

Os professores apoiam-se no *conhecimento da Matemática* em toda a sua prática, desde a preparação à dinamização da discussão, já que é este conhecimento que lhes dá segurança para: preverem e apreciarem as resoluções dos alunos; avaliarem erros cometidos, justificações e explicações oferecidas; analisarem raciocínios apresentados e conexões entre linguagens e representações; e formalizarem conclusões. O conhecimento mobilizado por estes professores aproxima-se do conhecimento do conteúdo revelado pelos professores do estudo de Cengiz e colegas (2011).

A vertente do *conhecimento do currículo* é chamada de forma mais intensa à atuação dos professores na fase de preparação da discussão, fundamentalmente na escolha das tarefas e na definição do propósito da discussão, ao trazer para a prática as orientações curriculares emanadas pelos documentos oficiais.

O c*onhecimento dos alunos e da aprendizagem* é convocado pelos professores à sua ação nas duas fases da discussão. Na preparação, na antecipação das estratégias e dificuldades a apresentar pelos alunos e também na escolha das tarefas, já que os professores têm ideias sólidas sobre o que consideram ser tarefas adequadas aos seus alunos. Em sala de aula, no incentivo à procura de estratégias suplementares, na identificação de razões para as dificuldades exibidas pelos alunos e na organização das intervenções dos alunos que levem à promoção da linguagem algébrica. Neste estudo, os professores não se limitam a identificar as dificuldades dos alunos, como acontece com os participantes do estudo de Cengiz e colegas (2011), mas a avançar com hipóteses explicativas para essas dificuldades.

A vertente do *conhecimento da prática letiva* é mais visível na atuação dos professores na fase de dinamização da discussão, já que se associa, fortemente, esta vertente do conhecimento à promoção da comunicação matemática que se gera durante a participação dos alunos na discussão. Assim, é evidente na forma como os professores estruturam a discussão, como chamam os alunos a intervir e fomentam o seu envolvimento na discussão, através do pedido de justificações, do incentivo à interrogação aos colegas, do estímulo à avaliação de raciocínios e do convite ao estabelecimento de conexões entre representações e linguagens. Em linha com o exposto, esta vertente do conhecimento didático dos professores é chamada, naturalmente, à fase de preparação da discussão, antes da aula e em sala de aula, ou seja, quando pensam sobre as resoluções a contemplar na apresentação em coletivo e na melhor ordem para o fazer.

Durante a atuação dos professores, na preparação e dinamização da discussão coletiva, emerge novo conhecimento didático, que contribui para o aprofundamento do conhecimento já mobilizado nestas discussões e que terá impacto em situações futuras. Em particular, a prática de Ana contribui para o fortalecimento do seu *conhecimento da prática letiva* com as aprendizagens realizadas sobre a importância que a antecipação de estratégias de resolução tem na discussão coletiva. Esta vertente do conhecimento sobressai, também, na ação de Jorge, com as aprendizagens realizadas sobre a importância da preparação prévia da seleção de estratégias e de trajetórias de sequenciação para essas estratégias. Na prática de Afonso, esta vertente do conhecimento emerge na consciência que toma sobre a sua atitude relativamente à promoção do discurso dos alunos, onde se confronta com ações de sobreposição das suas ideias às dos alunos e na importância de escolher alunos específicos para abrir a discussão. Esta vertente do conhecimento didático dos professores desponta, também, nas suas ações quando se envolvem na identificação das dificuldades dos alunos e das razões para essas dificuldades, ao contribuir para a reflexão sobre as suas práticas posteriores e alargar o seu leque de razões para a seleção de "boas" tarefas.

Esta vertente do conhecimento sai, ainda, reforçada pelas reflexões que os professores fazem no grupo colaborativo acerca das estratégias de ensino que podem usar no futuro para envolver mais os alunos na interpretação de estratégias novas incorporadas na discussão. Os professores concluem que chamar outros alunos a explicar a resolução apresentada é uma estratégia de ensino a usar nas suas práticas letivas posteriores. Essa opção permite, ainda colmatar dificuldades dos alunos, como explicar raciocínios seguidos por outros.

A vertente do *conhecimento do currículo* é incrementada no caso de Ana e de Afonso, relativamente à melhor abordagem a propor aos alunos para os conteúdos programáticos das Sequências e regularidades, Funções e Equações, já que a sua prática de orquestrar discussões coletivas evidencia que o trabalho prévio com as sequências potencia o estudo das funções e das equações.

O *conhecimento da Matemática* emerge na prática de Jorge na preparação individual que faz para a etapa da antecipação de possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos, na medida em que este professor desafia-se a pensar em novas possibilidades de resolução, para além das antecipadas no grupo colaborativo.

A mobilização e emergência do conhecimento didático dos professores na preparação e dinamização de discussões coletivas beneficia bastante de conhecimento provindo da investigação, trazido com a leitura e reflexão de um texto, na segunda sessão de trabalho, relacionado com as práticas de orquestrar uma discussão.

Os professores realizaram aprendizagens com a sua participação no grupo colaborativo, mobilizando os seus conhecimentos na sua prática letiva, e possivelmente, em situações futuras, o que leva a refletir que este pode ser um bom indicador para avaliar a qualidade da aprendizagem dos professores, já que ao convocarem conhecimentos adquiridos em situações novas mostram que estão a aprender.

Em síntese, a prática destes três professores na preparação e dinamização de discussões coletivas em Álgebra é suportada e fortalecida pela articulação de diversas vertentes do seu conhecimento didático, em especial, do conhecimento da Matemática, do currículo, dos alunos e da aprendizagem e da prática letiva. Esta articulação ganha com a leitura e reflexão de textos, de natureza mais teórica, relacionados com a orquestração de discussões coletivas, na medida em que proporciona oportunidades para refletir sobre os seus conhecimentos e práticas, ampliando-os.

Os professores mobilizam as diversas vertentes do conhecimento nas duas fases de discussão (preparação e dinamização), com incidências distintas. O conhecimento da

Matemática está presente nas duas fases contempladas no estudo, enquanto pilar de toda a prática dos professores, já que é este tipo de conhecimento que lhes permite: prever e avaliar resoluções dos alunos para as tarefas propostas; avaliar raciocínios, justificações e explicações; estabelecer conexões entre representações e linguagens; e formalizar conclusões. Esta vertente do conhecimento sai reforçada com as práticas de dinamizar discussões coletivas destes professores, em consequência do forte investimento na antecipação de diversas estratégias de resolução para uma certa tarefa algébrica.

O conhecimento dos alunos e da aprendizagem, também, surge nas duas etapas da discussão. Na primeira, é importante para a escolha das tarefas adequadas aos alunos e na antecipação de estratégias que os alunos podem apresentar para essas tarefas. Na segunda, é fundamental à prática dos professores de incentivo à procura de estratégias de resolução adicionais, de identificação das dificuldades dos alunos na resolução das tarefas e na procura de causas para essas dificuldades; e de organização das intervenções dos alunos.

O conhecimento da prática letiva é mobilizado pelos professores nos dois momentos da discussão. Contudo, é mais marcante na dinamização da discussão, em particular na promoção do discurso, em como os professores chamam os alunos a intervir e que tipo de solicitação lhes fazem (pedido de justificações, explicações, clarificações, estabelecimento de conexões) e como incentivam os alunos a interpelar os colegas. Em linha com o exposto, na preparação da discussão, este conhecimento é importante para a antecipação que os professores fazem das estratégias de resolução a selecionar e a melhor forma de as introduzir na partilha coletiva. Esta vertente do conhecimento sai fortalecida com as práticas dos professores de dinamizar discussões matemáticas, ao evidenciar, por exemplo, a importância da escolha de alunos para iniciar a apresentação das estratégias de resolução, por forma a alcançar o propósito da discussão.

O conhecimento do currículo, embora presente nas duas fases, é mais determinante no momento de preparação da discussão, ao trazer para a prática dos professores as orientações curriculares. Esta vertente do conhecimento revela-se, assim, decisiva na escolha das tarefas e na definição do propósito da discussão. As práticas de orquestrar discussões coletivas destes três professores fortalecem esta vertente do conhecimento, ao reforçar que o estudo do tópico Sequências e regularidades deve preceder o das Equações e das Funções para promover a aprendizagem dos alunos.

Em suma, este estudo mostra que o desenvolvimento do conhecimento didático dos professores surge ligado à prática de orquestrar discussões; que este conhecimento é incrementado por influência de conhecimento teórico provindo da investigação, como a análise de textos, ao ajudar os professores a refletir sobre a sua prática letiva anterior e a projetar novas práticas e que o trabalho desenvolvido no grupo colaborativo foi importante à concretização das suas práticas e conhecimento.

Sugestões para estudos futuros

O estudo desenvolvido contribuiu para compreender melhor a prática dos professores na preparação e dinamização de discussões coletivas, mas levantou também algumas interrogações que podem desencadear estudos futuros. A tarefa *Palitos* pôs os alunos em contacto com situações com as quais não estavam familiarizados e os resultados alcançados lançam o interesse para estudar a promoção de discussões a partir de tarefas que se centrem na interpretação de raciocínios oferecidos como resoluções dessa tarefa.

Nesta investigação, estudaram-se as ações do professor na condução da discussão, independentemente do momento em que está a decorrer. Também se pode induzir que as ações de elicitar estavam mais relacionadas com o momento de abertura da discussão e as restantes com o desenvolvimento da discussão. Por forma a compreender melhor como estas contribuem para a aprendizagem dos alunos, pode ser útil estudar as ações de ensino relacionadas com o momento de discussão.

O estudo realizado realçou, também, que dinamizar discussões coletivas é uma tarefa exigente e complexa que provoca tensões nos professores. As pistas apontadas por este estudo, despertam o interesse por aprofundar esta temática, como auxílio ao desenvolvimento de uma melhor compreensão pelo tema das discussões coletivas.

Reflexão final

Ao terminar a escrita desta tese, olho para o percurso realizado e reflito sobre o trabalho desenvolvido. Considero que este trabalho foi muito produtivo a nível pessoal e também a nível profissional. Com as leituras realizadas desenvolvi novos olhares sobre a prática de ensino e sobre a Matemática, identificando áreas de interesse e ideias-chave para promover a aprendizagem da Matemática. Foram estas leituras que influenciaram a organização do estudo e, em particular, que me auxiliaram na estruturação do trabalho a desenvolver no grupo de formação. Essas leituras contribuíram para a organização das sessões de trabalho com os professores, na medida em que apoiaram o meu trabalho de definição de diversos conjuntos de tarefas para os tópicos Sequências e regularidades, Funções e Equações, para a identificação dos conteúdos a debater e a refletir com os professores, bem como para a elaboração do quadro de análise para compreender os resultados obtidos com a investigação realizada.

O meu enriquecimento chegou, também, das experiências vividas nas aulas dos professores casos de estudo, onde tive oportunidade de participar e dar o meu contributo direta ou indiretamente, proporcionando situações de ensino diversificadas sobre o quadro das discussões matemáticas. As aprendizagens que fui realizando foram sendo incrementadas nas minhas próprias salas de aula com os meus alunos.

O percurso desenvolvido foi concretizado com a superação de alguns desafios. Trabalhar com um conjunto de professores que eu não conhecia, nem sabia como estavam habituados a trabalhar em grupo e em sala de aula, foi um dos primeiros desafios que enfrentei neste trajeto. Olhando para trás, verifico que a dedicação, o empenho, o espírito de interajuda, a colaboração foram elementos que estiveram sempre presentes em todos enquanto grupo e que contribuíram, sem dúvida, para o sucesso e qualidade do trabalho produzido nesta investigação, através das boas práticas e das profundas reflexões que se fizeram.

A elaboração do conjunto de tarefas que intentassem responder às ideias preconizadas pela investigação em Didática da Matemática e, em simultâneo, corresponder às expectativas dos professores, foi outro desafio que enfrentei. Em algumas situações, fui bem sucedida, já que os professores receberam as propostas com interesse e produziram atividade significativa com elas. Noutras, os professores decidiram pela sua adaptação ou recomendação de novas tarefas, o que foi um aspeto bastante positivo deste trabalho, na medida em que reflete o seu envolvimento com o trabalho proposto e a forma como encararam a colaboração sugerida. Para mim, estas ações dos professores também foram muito enriquecedoras, já que me permitiram receber novos contributos de professores com uma vasta experiência de ensino.

Outro desafio experienciado foi o tempo disponível para a realização da investigação. Embora esta se tenha desenvolvido por um período prolongado de tempo, por vezes, para a concretização de determinadas tarefas individuais e com os professores, senti que o tempo foi escasso para a execução de um trabalho com esta exigência e para as reflexões que se mantiveram no grupo de professores e com os professores individualmente sobre as suas aulas. Este obstáculo foi minimizado com o esforço e dedicação de todos.

Termino esta reflexão destacando outros elementos determinantes para a concretização deste trabalho: a participação em encontros nacionais e internacionais em Educação Matemática, o envolvimento em seminários de investigação, promovidos no âmbito deste programa de doutoramento e a publicação de artigos em revistas internacionais, que favoreceram a divulgação de pequenas partes desta investigação e receber contributos que permitiram aprofundar reflexões sobre o trabalho em desenvolvimento.

Em síntese, o balanço do trabalho realizado é bastante positivo e reforça as minhas convicções iniciais sobre a pertinência das discussões matemáticas para a aprendizagem, mostrando, contudo, que é importante continuar a investir na investigação desta temática.

Referências

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., et al. (2013). El conocimiento especializado del professor de Matemáticas: MTSK. *VII CIBEM.* Montevideo, Uruguay.

Aibéo, A., & Aibéo, P. (2012). *Isto não é (só) Matemática.* Vila do Conde: QuidNovi.

Alwarsh, A. A. (2018). Productive mathematical discussions in teaching through problem solving. *Ohio Journal of School Mathematics*, *78*, 4-10.

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, Mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 145-172.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In T. P. Vale (ed.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Arzarello, F. (1998). The role of natural language in prealgebraic and algebraic thinking. In H. Steinbring, M. G. Bussi, & A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 249-261). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Baek, J. M. (2008). Developing algebraic thinking through explorations in multiplication. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (eds.), *Algebra and algebraic thinking in the school mathematics* (pp. 141-154). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Bahr, D. L., & Bahr, K. (2017). Engaging all students in mathematical discussions. *Teaching Children Mathematics, 23*(6), 350-359.

Ball, D. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*(4), 449-466.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using Mathematics. In J. Boaler (ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 83-104). London: Ablex Publishing.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.

Bardin, L. (1994). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133–180. DOI: 10.3102/0002831209345157

Beswick, K., Callingham, R., & Watson, J. (2012). The nature and development of middle school mathematics teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 131-157. DOI: 10.1007/s10857-011-9177-9

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dinamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). London: Springer.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: the case of the dance of agency. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 3-16). Honolu: College of Education University of Hawai'i.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. In GTI (ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Bochicchio, D., Shelbi, C., Ostien, D., Rodriguez, V., Staples, M., Susla, P., et al. (2009). Shared language. *Mathematics Teacher, 102*(8), 606-613.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Boukafri, K., Civil, M., & Planas, N. (2018). A teacher's use of revoicing in mathematical discussions. In W. D. Moschkovich J. (ed), *Language and Communication in Mathematics Education.* ICME-13 Monographs (pp. 157-169). Springer, Cham.

Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teachers' beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 2-38.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* New York: Springer.

Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school: To giovanni prodi on occasion of his 70th birthday. *Educational Studies in Mathematics, 31*, 11-41.

Bussi, M. G. (1998). Joint activity in mathematics classrooms: A vygotskian analysis. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (eds.), *The culture of mathematics classroom* (pp. 13-49). Cambridge: Cambridge University Press.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório de Matemática: ações e intenções de uma professora. In Ponte, J. P. (org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 217-233). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich: Information Age Publishing.

Cengiz, N. (2013). Facilitating productive discussions. *Teaching Children Mathematics, 19*(7), 450-456.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 355–374.

Chamberlin, M. T. (2005). Teachers' discussions of students' thinking: Meeting the challenge of attending to students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 141-170.

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2003). *Classroom discussions using math to help students learn, grades 1–6.* Sausalito: Math Solutions Publications.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clayton, H. (2014). Keys to productive discussions in the Math classroom. *Making the Common Core Come Alive!*, *III*(IV), 1-6.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 258-279.

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (eds.). (2012). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Cuoco, A. (2008). Introducing extensible tools in high school algebra. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: seventieth yearbook* (pp. 51-62). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15 years old. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 45-70.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10.* Portsmouth: Heinemann.

Drouhard, J. P., & Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (eds.), *The future of the teaching and learning of algebra the 12th ICMI study* (pp. 227-264). Kluwer Academic Publishers.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupil's conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions developing relational thinking in elementary school. In J. Cai, & E. Knuth (eds.), *Early algebraization* (pp. 409-428). Berlin: Springer-Verlag.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 521-544.

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2010). Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 52-80.

Frankle, M., Carpenter, T., & Battey, D. (2008). Content matters: the case of algebraic reasoning in teacher professional development. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 333-359). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldblatt, E., & Smith, M. W. (1995). Alone with each other: Conceptions of discussion in one college classroom community. *Linguistics and Education, 7*, 327-348.

Goldenberg, C. (1991). *Instructional conversations and their classroom application.* Washington, DC: National Center for Research on Cultural Diversity and Second Language Learning.

González, N. R. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del professor de Matemáticas: un estudio de casos.* Granada.

Goulet, L., Krentz, C., & Christiansen, H. (2003). Collaboration in education: The phenomenon and process of working together. *The Alberta Journal of Educational Research*, *XLIX*(4), 325-340.

Grant, T. J., Kline, K., Crumbaugh, C., Kim, O.-K., & Cengiz, N. (2009). How can curriculum materials support teachers in pursuing student thinking during whole-group discussions? In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (eds.), *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 103-117). New York: Routledge.

Guerreiro, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, *23*(4), 279-295.

Guerreiro, A., Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2013). Mathematical communication: Teachers' recognition of the singularity of students' knowledge. *Proceedings of CERME 8* (pp. 3075-3084). Antalaya: Middle East Technical University.

Hammer, D. (1997). Discovery learning and discovery teaching. *Cognition and Instruction, 15*(4), 485-529.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: o trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna.* Lisboa: Mc Graw-Hill.

Hercovics, N., & Kieran, C. (1999). Constructing meaning for the concept of equation. In B. Moses (ed.), *Algebraic thinking, grades K-12: readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 181-188). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hessen, J. (2000). *Teoria do conhecimento.* (J. V. Cuter, Trad.) São Paulo: Martins Fontes.

Hiebert, J. , Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education, 58*(1), 47-61. DOI: 10.1177/0022487106295726

Hill, H. C. (2010). The nature and predictors of elementary teachers' mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 513-545.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Hill, H., & Ball, D. L. (2009). The curious - and crucial - case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2), 68-71.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., et al. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*, 430-511.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. Lester (ed.), *Handbook for research on mathematics education* (2nd ed., pp. 111-155). Charlotte: NC: Information Age Publishing.

Hintz, A. B. (2011). Understanding students' experiences as listeners during mathematical discussions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(3), 261-272.

Hoyles, C. (1985). What is the point of group discussion in mathematics?. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 205-214.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(2), 81-116.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139. DOI: 10.1016/j.jmathb.2007.05.005

Jackson, K. J., Shahan, E. C., Gibbons, L. K., & Cobb, P. A. (2012). Launching complex tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(1), 24-29.

Jansen, A. (2008). An investigation of relationships between seventh-grade students' beliefs and their participation during mathematics discussions in two classrooms. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(1), 68-100.

Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: A closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 371-388.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: the case of graphic representations of functions. In H. Steinbring, M. G. Bussi, & A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 271-288). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In S. Fennel (ed.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). London: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a simbolization point of view. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the Mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 187–228.

Kilpatrick, J., & Izsák, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: seventieth yearbook* (pp. 3-18). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kosko, K. W., & Wilkins, J. L. (2015). Does time matter in improving mathematical Discussions? The influence of mathematical autonomy. *The Journal of Experimental Education, 83*(3), 368-385.

Larson, B. E. (2000). Classroom discussion: A method of instruction and a curriculum outcome. *Teaching and Teacher Education, 16*, 661-677.

Larsson, M., & Ryve, A. (2012). Balancing on the edge of competency-oriented versus procedural-oriented practices: Orchestrating whole-class discussions of complex mathematical problems. *Mathematics Education Research Journal, 24*(4), 447–465.

Leikin, R., & Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 328-347.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, pp. 39-65.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study* (pp. 47-70). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

MacGregor, M. (1998). How students interpret equations intuition versus taught procedures. In H. Steinbring, M. G. Bussi, & A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 262-270). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Matos, A., & Ponte, J. P. (2009). Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, *19*(4), 25-34.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In B. Luengo-González, M. Gómez-Alfonso, & L. B. Nieto (eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 505-516). Badajoz: SIEM.

McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111-133.

McNair, R. E. (2000). Working in the mathematics frame: Maximizing the potential to learn from students' mathematics classroom discussions. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 197-209.

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Instituto de Educação.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sisyphus Journal of Education, 1*(3), 44-75.

Menezes, J. L., & Ponte, J. P. (2009). Investigação colaborativa de professores e ensino da Matemática. Caminhos para o desenvolvimento profissional. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 1*(1), 1-32.

Ministério da Educação – ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação – ME (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação – ME (2018). *Aprendizagens essenciais – Articulação com o perfil dos alunos*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 491–529.

Moschkovich, J. (2008). "I went by twos, he went by one": Multiple interpretations of inscriptions as resources for mathematical discussions. *The Journal of the Learning Sciences, 17*, 551–587.

Moschkovich, J., & Zahner, W. (2018). Using the academic literacy in mathematics framework to uncover multiple aspects of activity during peer mathematical discussions. *ZDM, 50*(6), 999-1011.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numerical patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai, & E. Knuth (eds.), *Early algebraization* (pp. 277-301). London: Springer.

Nathan, M. J., & Knuth, E. J. (2003). A Study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction, 21*(2), 175–207.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Nobre, S., Amado, N., Carreira, S., & Ponte, J. P. (2011). Algebraic thinking of grade 8 students in solving word problems with a spreadsheet. *Proceedings of CERME 7*. Reszow, Poland: University of Rzeszów, Poland.

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2012). *Eleição para o delegado de turma – caso multimédia*. In Site do Projeto P3M, Práticas Profissional de Professores de Matemática. [consult.17.set.2013] Disponível em http://p3m.ie.ul.pt/caso-3-eleicao-para-o-delegado-de-turma-3-ciclo

Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1997). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. *VII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 3-23). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Perelman, Y. (2008). *Álgebra recreativa.* RBA Coleccionáveis.

Philipp, R. A. (1999). The many-uses of algebraic variables. In B. Moses (ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 : readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 157-162). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Pirie, S. E. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: language as (slippery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. B. Bussi, & A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 7-29). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Pirie, S. E., & Schwarzenberger, L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 459-470.

Ponte, J. P. (1995). Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (eds.), *Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: que formação?* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005a). Gestão curricular em Matemática. In GTI (ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005b). A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (eds.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 267-284). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. In O. Zaslavsky, & P. Sullivan (eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (pp. 249-261). New York: Springer.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (ed.), *Educación matematics: teoría, critica y prática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez, & P. Boero (eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2015). As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. *Revista da Faculdade de Educação (Universidade do Estado de Mato Grosso), 23*(1), 131-150.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51-66.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae*, *1*, 45-59.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Ponte, J. P., Segurado, I., & Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: what happens when pupils work on mathematical investigations? In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (eds.), *Collaboration in teacher education: examples from the context of mathematics education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática*, 80, 8-12.

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (eds.), *The future of the teaching and learning of algebra the 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96. DOI: 10.1007/s11858-007-0061-0

Rawding, M. R., & Wills, T. (2012). Discourse: Simple moves that work. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(1), 46-51.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2012). The role of MKT in classroom practice. In ICME (ed.), *12th International Congress in Mathematics Education* (12th ICME) (pp. 4705-4713). Seoul: ICME.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 297–328. DOI: 10.1007/s10649-009-9222-0

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*, 65-82.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students access to significant mathematical ideas. In L. D. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143-164). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Roldão, M. (2007). Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. *Revista Brasileira de Educação, 12*(34), 94-103.

Rota, S., & Leikin, R. (2002). Development of mathematics teachers' proficiency in discussion orchestration. In A. D. Cokburn, & E. Nardi (eds.), *Proceedings of 26th PME International Conference*, *4* (pp. 137-145). Norwich: University of East Anglia.

Rowland, T. (2014). The knowledge quartet: The genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education, 1*(3), 15-43.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2003). The knowledge quartet. In J. Williams (ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(3), pp. 97-102). Birmingham.

Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: A stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM Mathematics Education*, *46*, 317–328. DOI: DOI 10.1007/s11858-013-0564-9

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (ed.), *Proceedings of 35th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, (pp. 81-88). Ankara, Turkey.

Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário.* Tese de doutoramento apresentada à Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de ciências, Lisboa.

Santos, L. (2001). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário. *Actas XIISIEM* (pp. 57-77). Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 243-261.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1999). On the meaning of variable. In B. Moses (ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 : readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 150-156). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action.* New York: Basic Books.

Selden, A., & Selden, J. (2012). A belief affecting students' success in problem solving and proving. *12th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 1542-1550). Seoul: International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

Selling, S. K., Shaughnessy, M., Willis, A., Garcia, N., O'Neill, M. K., & Ball, D. L. (2015). Standardized assessments of beginning teachers' discussion leading practice: Is it possible and what can we learn? In T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez (eds.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (812-819). East Lansing: Michigan State University.

Sherin, M. G. (2000). Facilitating meaningful discussion of Mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(2), 122-125.

Sherin, M. G. (2002a). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

Sherin, M. G. (2002b). When teaching becomes learning. *Cognition and Instruction, 20*(2), 119-150.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 71-94.

Simon, M. A., & Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 309-331.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, pp. 259–281.

Smith, E. (2003). Stasis and change: integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In W. G. J. Kilpatrick (ed.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 136-150). Reston: NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions.* VA, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Speer, N. M., King, K. D., & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal Mathematics Teacher Education, 18*, 105–122. DOI: 10.1007/s10857-014-9277-4

Speer, N. M., & Wagner, J. F. (2009). Knowledge needed by a teacher to provide analytic scaffolding during undergraduate mathematics classroom discussions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(5), 530-562.

Staples, M. (2007). Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition and instruction, 25*(2), 161–217.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Thompson, P. W., & Smith III, J. P. (2008). Quantitative reasoning. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New Iork: Lawrence Erlbaum Associates.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Continuum.

Truxaw, M. P., & DeFranco, T. C. (2007). Mathematics in the making: Mapping verbal discourse in Pólya's "let us teach guessing" lesson. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 96–114.

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de investigação em educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Tyminski, A. M., Zambak, V. S., Drak, C., & Land, T. J. (2014). Using representations, decomposition, and approximations of practices to support prospective elementary mathematics teachers' practice of organizing discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 463-487.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, & A. P. Schulte (eds.), *The ideas of algebra: K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1999). Doing algebra in grades K-4. In B. Moses (ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 : readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 5-6). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., et al. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática: propostas curriculares para o ensino básico.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

van Es, E. A. (2010). A framework for facilitating productive discussions in video. *Educational Technology*, 8-12.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275-298.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Wagner, J. F., Speer, N. M., & Rossa, B. (2007). Beyond mathematical content knowledge: A mathematician's knowledge needed for teaching an inquiry-oriented differential equations course. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 247-266.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: seventieth yearbook* (pp. 113-126). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., et al. (2013). Introduction. In C. M. (ed.), *Task design in mathematics education.* Proceedings of ICMI Study 22 (pp. 9-15). Oxford: ICMI.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247–261.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In S. Lerman (ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classrooms* (Vol. 14, pp. 149-168). Dordrecht: Springer.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing? In H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston, Virginia: Nation Council of Teachers of Mathematics.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Yerushalmy, M., & Elikan, S. (2010). Examples of learning through teaching: Mathematical pedagogy. In R. Leikin, & R. Zazkis (eds.), *Learning through teaching mathematics* (pp. 191-207). New York: Springer.

Yin, R. K. (1994) *Case Study Research: design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

ANEXOS

Anexo 1

Guião para a entrevista inicial

Aspetos da vida profissional

- Quantos anos tem de serviço?

- Fale-me um pouco sobre o seu percurso profissional. Distingue momentos marcantes nesse percurso? Quais? Porquê?

- Consegue identificar aspetos positivos e negativos da profissão de professor?

- Há quanto tempo trabalha nesta escola? Como a caracteriza?

- Costuma trabalhar com colegas do seu departamento (ou de outros)? Porquê? Que tipo de trabalho realizam?

- Costuma registar dados das suas aulas, por exemplo, do trabalho dos seus alunos, das suas intervenções? De que forma? Com que objetivo?

- Como procura refletir sobre as suas aulas? Que papel tem essa reflexão? Reflete com colegas?

- Que anos leciona este ano?

- Como caracteriza as suas turmas?

Relação com a proposta de trabalho colaborativo

- Alguma vez participou num projeto de investigação? Qual? Que razões o levaram a aceitar esse desafio? Que expectativas tinha? Foram superadas? Que contributos retirou para a sua prática profissional?

- O que motivou a sua colaboração neste projeto de investigação? Que expectativas tem?

- Já fez investigação?

- Faz, habitualmente, leituras no âmbito da investigação em educação matemática?

- Costuma frequentar encontros de Matemática? O que espera conseguir? As expectativas são correspondidas?

Perspetivas sobre o tema da discussão matemática

- Tendo como base a sua experiência, considera que o envolvimento dos alunos em discussões matemáticas é vantajoso para a aprendizagem? Porquê? Esta sua perspetiva sobre a discussão é recente?

- Como integra o momento de discussão matemática na sua planificação? E nas suas aulas? O que espera ser o retorno do investimento na planificação?

- Como seleciona, habitualmente, os alunos para apresentarem as suas estratégias de resolução? Que vantagens e/ou desvantagens identifica nessa forma de escolha?

- Considera que há temas matemáticos que se prestam mais à discussão? Quais? Porquê?

- Promove discussões matemáticas nas suas aulas desde há muito tempo? Que dificuldades e/ou sucessos enfrenta na condução de uma discussão?

- O que pode facilitar e/ou condicionar o envolvimento dos alunos em discussões matemáticas?

Perspetivas sobre o tema da Álgebra (Tendo como base a sua experiência)

- Como trabalha habitualmente a Álgebra com os seus alunos do 3.º ciclo (em particular, nos tópicos das sequências e regularidades, das funções e das equações)? Que abordagem faz nas aulas? Que materiais utiliza? Que resultados tem obtido?

- Quais as principais dificuldades dos alunos, especialmente os do 3.º ciclo, no trabalho com a Álgebra? Especifique as principais dificuldades nos tópicos das sequências e regularidades, das funções e das equações.

- Que potencialidades identifica na promoção de discussões matemáticas para o desenvolvimento da Álgebra e do pensamento algébrico?

- Da sua experiência, como lidam os alunos com o processo de generalização e de simbolização? Que impacto pode ter a promoção de discussões matemáticas nesses processos? E os outros temas matemáticos?

Anexo 2

Guião da entrevista final

Relação com a proposta de trabalho colaborativo

− A sua participação neste grupo de trabalho colaborativo contribuiu para alterar/repensar alguns aspetos da sua prática letiva? Se sim, quais? Essas alterações contribuíram para melhorar a aprendizagem dos alunos? Se sim, em que medida?

− Considera que o trabalho desenvolvido na ação de formação contribuiu para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional? Se sim, em que medida?

Perspetivas sobre o tema da discussão matemática

− Tendo como base a sua experiência nesta formação, como vê a importância da promoção da discussão matemática nas suas aulas? Essa conceção é diferente da que tinha inicialmente? Se sim, em que medida? (sugerir a apresentação de exemplos)

− Que estratégias utiliza para promover a discussão matemática nas suas aulas? Prepara previamente esse momento? Se sim, como? (se necessário sugerir algumas ideias: antecipação de resoluções, dificuldades, seleção e organização das intervenções,...). A participação nesta ação contribuiu de alguma forma para alterar a sua prática letiva anterior relativamente à condução de discussões matemáticas em sala de aula? Que dificuldades e/ou sucessos enfrenta na condução de uma discussão?

− Como vê, atualmente, o envolvimento dos alunos em discussões matemáticas? Houve alguma alteração? A participação neste trabalho colaborativo contribuiu de alguma forma para essa eventual alteração? Em que medida essa participação dos alunos nas discussões matemáticas contribuiu para a sua aprendizagem?

− Depois da participação nesta ação, considera que há temas matemáticos que favorecem mais a discussão? Se sim, quais? Porquê?

Perspetivas sobre o tema da Álgebra

− Tendo como base a sua participação nesta formação, a forma de trabalhar a Álgebra com os seus alunos do 3.º ciclo (em particular, nos tópicos das sequências e regularidades, das funções e das equações) sofreu alguma alteração? Se sim, em que medida? Que vantagens e/ou desvantagens identifica nessa alteração?

− Que potencialidades identifica na promoção de discussões matemáticas para o desenvolvimento da Álgebra e do pensamento algébrico?

− Da sua experiência, como lidam os alunos com o processo de generalização e de simbolização? Que impacto teve a promoção de discussões matemáticas nesses processos?

Práticas de discussão matemática

Nesta parte da entrevista, pede-se ao professor que comente pequenos episódios de discussão das suas aulas, envolvendo a seleção e organização das resoluções dos alunos e a gestão da própria discussão.

Como analisa o seu papel neste episódio?

Como analisa o envolvimento dos alunos?

Anexo 3

PLANO GERAL DA AÇÃO DE FORMAÇÃO

Proposta a apresentar e a negociar com os professores

Objetivo: Contribuir para o desenvolvimento profissional dos formandos, ao nível do seu conhecimento e práticas profissionais e consequente melhoria das aprendizagens dos alunos. Neste sentido, pretende-se realizar experiências de desenvolvimento curricular que contemplem a planificação, condução e reflexão de discussões matemáticas em sala de aula; aprofundar o conhecimento matemático, didático e curricular no tema matemático da Álgebra; criar dinâmicas de trabalho colaborativo e refletir sobre as práticas letivas.

Metodologia: A ação de formação contempla sessões de trabalho que visam abordar e aprofundar as temáticas das discussões matemáticas e da Álgebra, com vista ao desenvolvimento do conhecimento matemático, didático e curricular; planificar sequências didáticas e momentos de discussão matemática, a partir da seleção de algumas tarefas relacionadas com o tema da Álgebra; e refletir sobre a prática.

Calendarização e sumário das sessões de trabalho:

1.ª sessão **1/10/2013**	Abordagem à temática da discussão matemática, a partir da análise e reflexão de textos e de vídeos de episódios de sala de aula.
2.ª sessão	Planificação de sequências didáticas relacionadas com o tema da Álgebra, a partir de propostas de tarefas pelos formandos, e de momentos de discussão matemática.
3.ª sessão	Reflexão de episódios de sala de aula relacionados com o momento da discussão matemática. Abordagem à temática da Álgebra, com incidência no desenvolvimento do pensamento algébrico, na simbolização e na generalização, através da análise e reflexão de alguns textos e da exploração de algumas tarefas matemáticas.
4.ª - 8.ª sessão	Reflexão de episódios de sala de aula relacionados com o momento da discussão matemática. Planificação de sequências didáticas relacionadas com o tema da Álgebra, a partir de propostas de tarefas pelos formandos, e de momentos de discussão matemática.

9.ª sessão	Reflexão de uma situação de ensino de cada grupo que contemple a preparação e a condução de uma discussão matemática.
10.ª sessão	Balanço do trabalho desenvolvido nas diversas sessões e sugestões para trabalho futuro.

Avaliação: A avaliação dos formandos contempla:

i) participação nas diversas sessões de trabalho (20%)

ii) reflexão de um episódio de sala de aula que envolva o momento de discussão matemática (40%)

iii) elaboração de um relatório crítico reflexivo que reflita as aprendizagens realizadas na ação (40%)

Resultados: A participação na ação, para além de contribuir para o desenvolvimento profissional, pode conduzir à publicação de artigos e à divulgação do trabalho em encontros de investigação em Educação Matemática.

Anexo 4

Caso 3: Eleição para o delegado de turma (7.º Ano)

A aula – Discussão da tarefa – Concretização – Episódio 3

Professora – Podes apagar a primeira estratégia, sem apagar a segunda, explica lá como é que pensaram. Então?
Mariana - Nós pusemos que o Lucas, os votos do Lucas é igual a x. Da Francisca é igual a x+2, e da Sandra é igual a 2x.
Professora – Dona Beatriz, já que está tão cansada conte lá qual é a diferença entre a estratégia que já está completa e aquela que…
Beatriz – Não estou cansada professora…
Professora - …e a que a Mariana acabou de escrever. Qual é a grande diferença? Beatriz?
Beatriz – Qual era a pergunta?
Professora – Qual é a diferença entre uma e outra? Pedro, conta lá.
Pedro – A diferença?
Professora – Sim…ou são iguais? Na estratégia usada pela Leonor e Margarida…
Beatriz – Sim, eu sei, eu sei…
Professora – Diz lá.
Beatriz – O Lucas é igual a x e no da Margarida, o Lucas era x-2.
Professora – Sim e então? O que é que isso significa?
David – Que a incógnita é diferente nos dois.
Professora – Que a incógnita é diferente? Para mim a incógnita é a mesma… Diz lá José Ricardo.
José Ricardo – Naquele lado o x vai ser diferente…vai ter um valor diferente…
Professora – Ou seja, o José Ricardo está a avançar que na estratégia que a Mariana vai usar vamos chegar a um valor de x diferente. Quem quer apostar que sim, quem quer apostar que não?
Professora – Então concordam que o total de votos também é 30, não é? Então aquela equação que a Mariana ali escreveu, concordam?
Vários – Sim.
Professora – Então vá, representa lá na balança…ah, já está. Concordam com a representação da balança?
Vários – Sim.
Professora – Ok, então vá, avancemos.
Professora – Agora a minha pergunta é: a equação que a Mariana aqui escreveu, esta equação…é equivalente a esta?
Vários – Não.
Professora – Porquê?
Aluno – Porque o valor da incógnita é diferente.
Professora – Então…Daniel, concordas?

Professora – A minha pergunta é: esta equação é equivalente a esta?
Vários – Não.
Professora – Porquê?
Vários – É.
Aluno – Porque a incógnita é diferente.
Professora – O que é que são equações equivalentes?
Mariana – Tem o mesmo conjunto solução.
Professora – Então volto a perguntar: aquelas duas equações são equivalentes?
Vários – São.
Vários - Não…
Aluna – É possível e determinada.
Professora – Diz lá, Ana Rita…
Ana Rita – Se tiver o mesmo valor de solução do que … são equivalentes.
Professora – Exatamente e a minha pergunta é: esta e esta têm o mesmo conjunto solução?
Vários – Não.
Professora – Então?
Aluno – Não são.
Professora – Não são equivalentes, exatamente. Qual é a solução desta equação?
Aluno – 7.
Professora – Então escrevam.
Aluno – E da outra 9.
Professora – E desta é…
Vários – 9.
Professora – 9. Portanto, esta equação tem solução 9, esta equação tem solução…
Vários – 7.
Professora – 7. E aqui o Vasco diz "então está errado".
Vasco – Não, é possível e determinada…
Professora – É possível e indeterminada?
Mariana – Não, o valor está certo.
Professora – Carolina, aquelas duas equações, como é que classificamos aquelas duas equações? A primeira equação, como é que nós a classificamos? Como?
Mariana - Possível e determinada.
Professora – Possível e determinada. Concordam? A segunda equação Vasco, como é que eu a classifico?
Vasco – Possível e determinada.
Aluna – Isso é a primeira…
Aluno – Também é possível e determinada.
Maria – Possível determinada.
Professora – É possível e determinada.
Aluno – Foi o que eu disse há um bocado.
Professora – Sim, mas estavas a dizer que não, que tem vários valores de x. Aquelas equações têm vários valores de x?
Vários – Não.

Professora – Tem um valor único, certo? Portanto é apenas uma única... solução, certo? Então existe algum problema?
Vários – Não.
Aluna – Então porque é que ali dá 7 e ali dá 9?
Aluno – Eu disse que era possível e determinada!
Professora – Sim, mas a questão que se coloca...a minha pergunta é...Vasco, ainda há um bocado chegámos ao 7 e tu disseste "mas há aqui qualquer coisa que está errado"...foi ou não foi?
Mariana – Chegámos a valores de x diferentes
Professora - Diz lá Mariana... "chegámos a valores de x diferentes" e o que é que isso significa? Gabriel, o que é que aquilo significa?
Gabriel – Que não são equações equivalentes...
Professora – Sim, essa parte já chegámos... agora pensando apenas naquilo que tu fizeste...
Mariana – O x aqui é o valor do Lucas e ali é da Francisca.
Professora – Não, mas eu quero que penses só na tua. Então?
Aluna – Então porque é que ali está 9 e aqui está 7?
Professora – Olhem o vosso colega Gonçalo fez a seguinte pergunta: porque é que ali está 9 e ali está 7? Quem responde?
Aluno – Eu sei, porque essas equações não são equivalentes.
Professora – O que é que isso significa?
Aluno – E a solução não é igual...
Professora – Gonçalo, as equações não são equivalentes, portanto, se elas não são equivalentes, não podem ter o mesmo conjunto...
Vários – Solução.
Professora – E porque é que aqui deu 9 e aqui foi dar 7?
Aluna – Porque a equação...
Aluno – São diferentes...
Professora – As equações são diferentes, exatamente. Porquê? Um de cada vez...
Danilo (?) – O x aqui é o último, aí é o primeiro...
Professora – Concordam com o Danilo?
Aluno – Não ouvi...
Professora – Portanto aquilo que o Danilo acabou de explicar é que o valor de x aqui é referente a quem?
Vários – Ao Lucas.
Professora – E aqui é em relação à...
Vários – Francisca.
Professora – Francisca. Por isso, se os pontos de partida são diferentes, se nós estamos a considerar o valor de x para pessoas diferentes, é óbvio que as equações aqui... são diferentes, por isso elas não são equivalentes e não podemos chegar... à mesma solução da equação. E à solução do problema?
Aluno quadro – Também não.
Professora – Também não?
Aluno – Pode ser a mesma...
Professora – Então traduz lá a solução do problema.
Aluna – a única coisa diferente é o valor de x...

Professora – Então, turma? Afinal, indo por caminhos diferentes, o que é que obtivemos?
Aluno – Resultados iguais…
Professora – A mesma solução do problema, ou seja, usando a mesma estratégia, que é a resolução da equação, havia diferentes formas de representar o enunciado como uma igualdade. Temos aqui a primeira que foi a Leonor e a Margarida, que fizeram depender os votos do Lucas e da Sandra dos votos da Francisca e neste caso a Mariana e o David optaram por fixar os votos do Lucas e a partir dos votos do Lucas fazer depender...
Aluna – A Francisca e a Sandra.
Professora – O número de votos da Francisca e o número de votos da Sandra....
Aluno – Dava a mesma coisa para a Sandra ...
Professora – As equações deram soluções diferentes, mas permitiram obter a mesma resposta ao problema. Estão a perceber?
Vários – Sim.
Professora – Ou seja, o problema pode ser resolvido de várias formas e chegar ao mesmo resultado. São estratégias diferentes, estas duas muito próximas porque recorreram à equação, mas permitiram chegar de facto à mesma solução da equação. Obrigada. Podem-se sentar.

(Oliveira et al., 2012)

Anexo 5

SEQUÊNCIAS E SUCESSÕES

7.º ANO

Domínio	Conteúdos	Tarefas
Sequências e sucessões	- Sequências e sucessões como funções; - Gráficos cartesianos de sequências numéricas; - Problemas envolvendo sequências e sucessões.	

<u>Tarefas</u>

Tarefa: Cruzes às estrelas

Observa a tabela que se segue e considera que continua da forma que a tabela sugere:

★	✜
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	…
7	15
8	…
⋮	⋮

1. Completa a tabela. Explica o teu raciocínio.

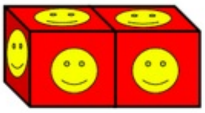
2. Quantas *cruzes* esperarias encontrar na tabela para 60 *estrelas*? E quantas estrelas esperarias encontrar para 93 *cruzes*?

3. Que relação existe entre o número de *estrelas* e o número de *cruzes*? Escreve uma expressão que traduza essa relação.

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



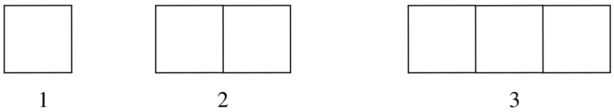
1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

(Canavarro et al., 2014)

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos, que continua da mesma forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

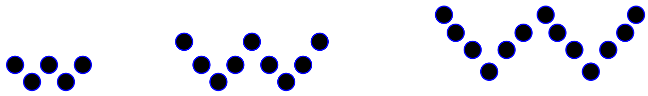
Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

(adaptada de (Rivera & Becker, 2008))

Tarefa: W aos pontos

Considera a seguinte sequência de figuras e considera que continua da mesma forma que a imagem sugere:



...

1. Explica quantos pontos terá 7.ª figura. E a 100.ª?

2. Escreve uma regra que te permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência. Explica como pensaste.

3. A regra $W = 4\times(n+1) - 3$ é válida para determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência? Como terá sido obtida?

4. Será possível construir alguma figura com 257 pontos? Explica o teu raciocínio.

(adaptada de (Rivera & Becker, 2008))

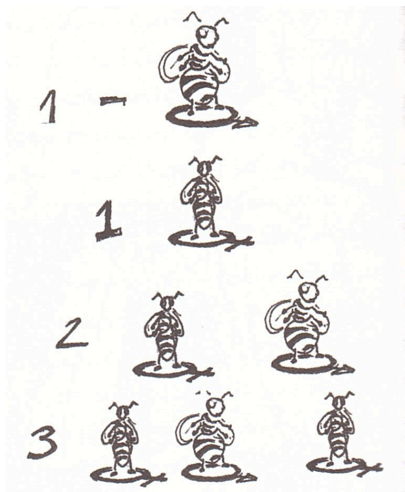
Tarefa: A família do zangão

No reino dos insetos, os zangões, machos das abelhas, têm apenas um papel – detetar rainhas e fecundá-las, mas os zangões são gerados a partir de ovos não fecundados, ou seja, ovos gerados apenas pela sua mãe – abelha fêmea. Vamos analisar a sua família.

Se na geração 1 tivermos o zangão, na geração anterior, geração 2, temos a mãe do zangão. Mas a mãe do zangão teve, necessariamente, uma mãe e um pai, pois só assim se têm fêmeas, o que significa que o nosso zangão tem um avô e uma avó (geração 3), e assim sucessivamente.

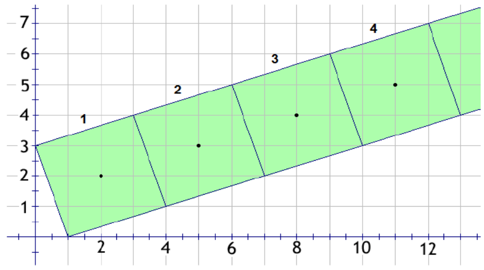
1. Como será a geração 5 e 6 da família do zangão?

2. Quantos elementos terá a 12.ª geração da família do zangão? E qualquer geração?



(Adaptado (Aibéo & Aibéo, 2012))

Tarefa: Quadrados em referencial



Observa a figura e considera que a sequência dos quadrados continua da mesma forma que a imagem sugere:

1. Quais são as coordenadas do centro do 20.º quadrado? Explica como pensaste.

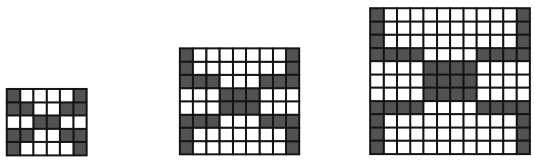
2. E quais são as coordenadas do vértice inferior esquerdo do 34.º quadrado? Justifica o teu raciocínio.

3. Escreve o termo geral das coordenadas do centro e de cada vértice de qualquer quadrado da sequência.

(adaptada de (Vale, et al., 2009))

Tarefa: Mosaicos brancos e pretos

Observa a seguinte sequência de figuras e considera que continua da mesma forma que a imagem sugere:



1. Explica como será a 20.ª figura desta sequência.

2. Escreve o termo geral da sequência de mosaicos pretos e explica como a obtiveste.

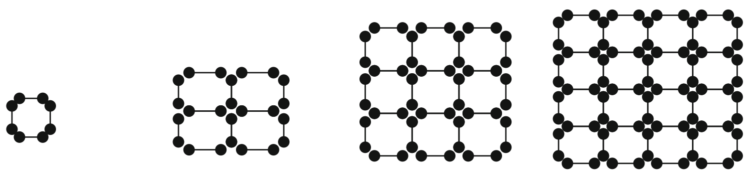
3. A partir da lei de formação escrita anteriormente, determina o número de mosaicos pretos da 25.ª figura.

4. Qual a figura que terá 94 mosaicos pretos? Explica como pensaste.

(adaptada de (Rivera, 2010))

Tarefa: Mosaicos da cidade

Considera a seguinte sequência de figuras, que continua como a imagem sugere:



Escreve o termo geral da sequência de pontos de qualquer figura e da sequência de linhas. Explica o teu raciocínio.

(adaptada de (Rivera, 2010))

Anexo 6

FUNÇÕES

7.º ANO

Domínio	**Conteúdos**	**Tarefas**
Definição de função	- Função ou aplicação de A em B; domínio e contradomínio; igualdade de funções; - Pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente; - Funções numéricas; - Gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano.	
Operações com funções numéricas	- Adição, subtração e multiplicação de funções numéricas com o mesmo domínio; exponenciação de expoente natural de funções numéricas; - Operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos; - Funções constantes, lineares e afins; formas canónicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canónica; - Funções de proporcionalidade direta; - Problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta.	

8.º ANO

Tópico	**Objetivos**	**Tarefas**
Funções linear e afim	Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim. Relacionar as funções linear e afim. Relacionar a função linear com a proporcionalidade direta.	

Tarefas

Tarefa: Programas da secretaria

Parte I

A secretaria da tua escola trabalha diariamente com diversos programas informáticos. Um deles permite introduzir o nome de um aluno e ficar a conhecer, entre outros dados, o seu número de estudante.

1. Indica três nomes para introduzires no programa e a resposta que esperas obter.

2. Um outro programa da secretaria permite ficar a conhecer as turmas atribuídas a cada professor, depois de se introduzir o nome do professor. Representa esta situação depois de perguntares ao teu professor de Matemática as turmas que leciona. Compara esta correspondência com a da questão anterior. O que podes concluir?

3. Apresenta outras situações onde se possam identificar correspondências e compara-as com as dos teus colegas.

Parte II

Entusiasmado pelos programas da secretaria, o Miguel resolveu criar programas de códigos na sua folha de cálculo e levar desafios para a aula de Matemática. O primeiro código que apresentou aos colegas foi o seguinte:

	A	B	C	D
1				
2		**Entra**	**Sai**	
3		**1**	**6**	
4		**3**	**10**	
5		**6**	**16**	
6		**9**	**22**	
7				
8				

1. Que número devolveria o programa do Miguel se fosse introduzido o 42?

2. O programa devolveu o número 152. Que número foi introduzido?

3. O Miguel continuou a criar programas. Considera os seguintes códigos que criou:

i) introduz um número e eu devolvo-te a quinta parte desse número;

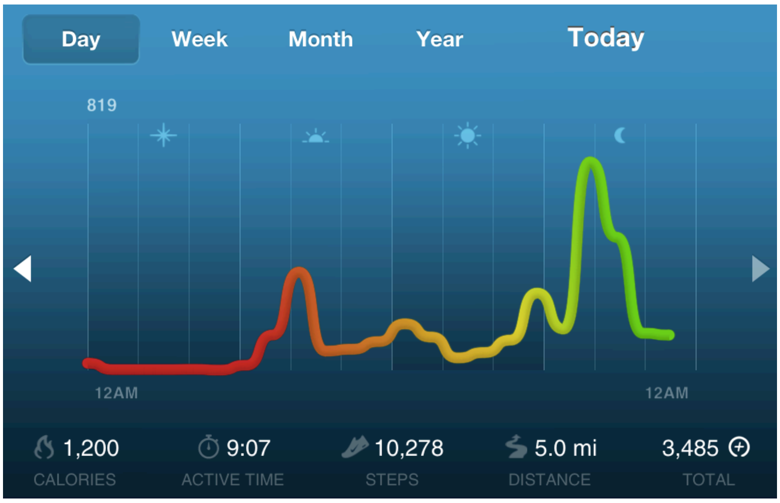
ii) introduz um número que eu devolvo-te a décima parte do dobro do número introduzido.

Compara os números devolvidos pelos dois programas, se fossem introduzidos os mesmos números. O que concluis? Justifica as tuas conclusões.

4. Inventa novos códigos para apresentares aos teus colegas.

Tarefa: Calorias ao dia

A Francisca é uma adepta do desporto e preocupa-se muito com a sua saúde. Ela usa diariamente uma pulseira que regista toda a sua atividade física, nomeadamente as calorias gastas durante cada dia, como mostra o gráfico seguinte. Observa o gráfico e responde às questões.



1. O gráfico representa uma função? Porquê?

2. O que relaciona o gráfico?

3. Escreve um pequeno texto que resuma a atividade da Francisca no dia a que se refere o gráfico apresentado.

4. Como achas que seria o gráfico relativo à tua atividade no dia de ontem?

Tarefa: Máquina das operações

Representa num gráfico cartesiano as imagens dos objetos 2, 3, 5 e 7 pelas funções:

q: *quadrado do número...* e

i: *o próprio número*.

Traduz em linguagem natural e determina: $(q+i)(2)$; $(q-i)(7)$; $(iq)(5)$; $q^2(3)$ e $i^3(2)$.

Tarefa: O melhor alarme

A família Galvão possui um empresa de instalação de alarme. Para oferecer sempre as melhores condições aos seus clientes compara regularmente as campanhas das outras empresas da concorrência. Na última sondagem de mercado apercebeu-se que a empresa **ALARME SEGURO** está a fazer a campanha

125€ de instalação + 35€/mês

enquanto a empresa **PROTEÇAO ALARME** instala o sistema de alarme gratuitamente e cobra apenas a mensalidade de 37,5€.

Perante este cenário, a empresa da família Galvão decidiu fazer uma campanha nunca feita até ao momento que consiste no pagamento da totalidade do contrato. Sabendo que as empresas fazem contratos de 5 anos, qual poderá ser o slogan da campanha da família Galvão?

Se as empresas não exigissem período de fidelização, qual das situações seria mais vantajosa? Porquê?

Tarefa: Multas na biblioteca

A Joana requisitou um livro na biblioteca da sua escola, mas não o entregou no prazo estipulado. Quando foi devolver o livro apresentaram-lhe uma multa superior a 13€. Sabendo que a biblioteca cobra 0,25€ mais 0,12€ por cada dia ultrapassado, quantos dias, no mínimo, teve a Joana o livro em atraso?

Tarefa: Investigar

Investiga o que acontece quando adicionas funções afins. E se fossem lineares?

Tarefa: Quentes e boas!

Parte I

Com a chegada do Outono chegam também as castanhas.

Nas ruas da cidade é habitual encontrar muitos vendedores de castanhas com os seus carrinhos assadores. O sr. Martinho vende a dúzia de castanhas a 2€.

1. Quanto pagaria uma pessoa que comprasse 18 castanhas?
2. Com 10€ quantas castanhas se podem comprar?
3. Quanto custa cada castanha?
4. Escreve uma expressão algébrica que represente o preço a pagar por qualquer quantidade de castanhas compradas.

Parte II

Como o negócio estava fraco, o sr. Martinho resolveu fazer o seguinte pregão:

Quentes e boas são as castanhas do Martinho!
2€ a dúzia
e uma por mais um eurinho.

1. Representa esta nova situação através de uma tabela ou de uma diagrama de setas e diz se se trata de uma função de proporcionalidade direta.

2. Com 10€ que quantidade de castanhas se poderiam comprar? Explica como pensaste.

Tarefa: Corrida de sapos

A meia maratona de sapos é uma prova de 5m. Para participarem nesta prova foram inscritos apenas 2 sapos. Um deles dá um salto de 80cm a cada 5 segundos e o outro um salto de 15cm a cada segundo. Qual dos dois vence a prova? Explica como pensaste.

Tarefa: Compras

Hoje em dia, os supermercados fazem diversas promoções para atraírem clientes. O supermercado *Descontex* tem, desta vez, duas promoções:

Leve duas embalagens de iogurtes e pague uma.
Acumule 10% de desconto em cartão na compra de fiambre.

1. Que percentagem de desconto está a ser aplicada aos iogurtes? Escreve uma expressão que indique o preço a pagar depois de aplicado o desconto.

2. Sabendo que o quilograma do fiambre está a 8,69€ e que a Mafalda comprou 250 gr de fiambre, quanto vai acumular em cartão? E quanto vai pagar?

3. Escreve uma expressão que indique o preço a pagar por qualquer quantidade de fiambre comprada e o valor a acumular em cartão.

4. Com 3€, que quantidade de fiambre pode comprar?

5. Sabendo que acumulou no cartão 0,13€, que quantidade de fiambre comprou?

Tarefa: Inscrição no ginásio

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios que existem na sua cidade.

O ginásio *100 calorias* pratica os seguintes preços com acesso livre ao ginásio:

Inscrição no valor de 50 € + 40 € de mensalidade.

O ginásio *Em forma*, também com acesso livre, oferece o valor da inscrição e tem uma mensalidade de 45 €.

1. Explica que ginásio deve escolher o Santiago.

2. Representa, no mesmo gráfico, a evolução do preço a pagar nos dois ginásios e explica como este processo te ajuda a escolher o melhor ginásio.

3. Ao fim de 3 meses, quanto gastou o Santiago em cada um dos ginásios? Ao fim de quanto tempo o Santiago gastou no ginásio *100 calorias* 210 euros?

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência. Representa-as graficamente e compara-as.

Tarefa: O que varia?

Representa graficamente a função $y = 2x + \boldsymbol{a}$ em que **a** representa um número real qualquer.

Verifica o que acontece ao gráfico da função à medida que **a** aumenta. E se diminuir?

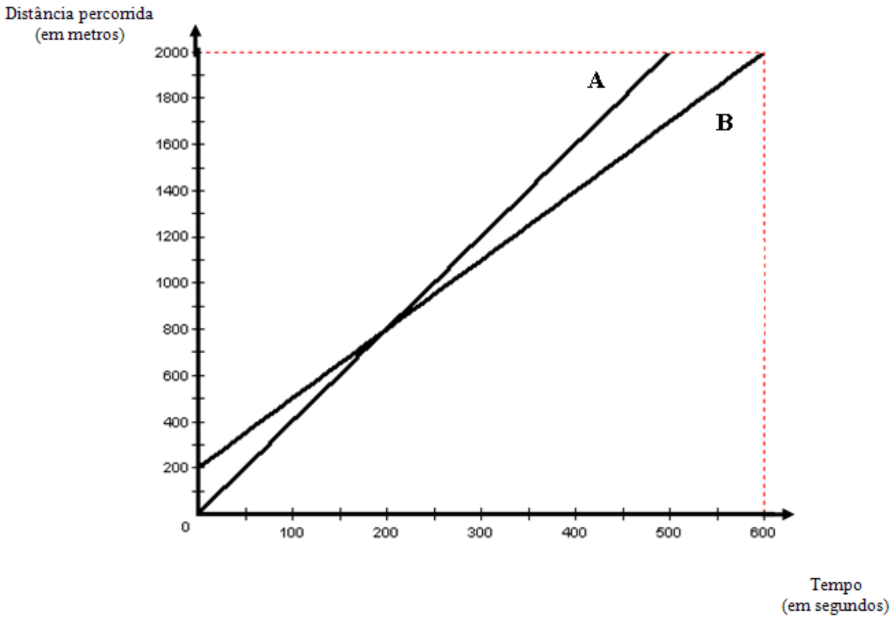
Faz o mesmo estudo para a função $y = \boldsymbol{b}x + 3$ em que **b** representa um número real qualquer. O que concluis?

Anexo 7

Tarefa:

A Rita e o Miguel resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo com 2000 metros. Para tornar a corrida mais justa, Miguel disse a Rita que a deixaria partir alguns metros à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer.

O gráfico abaixo mostra uma previsão sobre o modo como decorre a corrida, supondo que:



- O Miguel percorre 4 metros por segundo;
- A Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.

Observa então que cada um corre a uma velocidade constante.

Analisa o gráfico e responde às questões:

a) Achas que o Miguel tem razão? Quem é o vencedor?

b) Que distância percorre a Rita ao fim de 100 segundos?

c) Quanto tempo demora a Rita a percorrer 1400 metros?

(retirado de (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 123)

Anexo 8

Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de $4y$ como: – quatro " y 's"; – um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – $4+y$ por analogia com $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$.	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x+2)=7x$ $\Leftrightarrow 3x+2=7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x-215=265 \Leftrightarrow 16x=265-215$ $30=x+7 \Leftrightarrow 30+7=x$ $3x+5=2x \Leftrightarrow 3x=2x+5$ $7x=x+8 \Leftrightarrow 7-8=x+x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x+5=8 \Leftrightarrow -2x+5-5=8+5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x-3=2x-4 \Leftrightarrow x=2x-4$	Kieran, 1992

	$6x = 24 \Leftrightarrow 6 + x = 24$ $11x = 9x = \frac{11}{9}$	Kieran, 1985, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$2x = 4 \Leftrightarrow$ *i)* $x = 4 - 2$; *ii)* $x = \frac{4}{-2}$; *iii)* $x = \frac{2}{4}$	Lima e Tall, 2008
	$-x = -17 \Leftrightarrow ??$ $-x = 4 \Leftrightarrow ??$	Vlassis, 2001

(retirado de (Ponte, Branco, & Matos, 2009, pp. 96-97))

Anexo 9

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

7.º ANO

Domínio	**Conteúdos**	**Tarefas**
Equações algébricas	- Equação definida por um par de funções; primeiro e segundo membro, soluções e conjunto- solução; - Equações possíveis e impossíveis; - Equações equivalentes; - Equações numéricas; princípios de equivalência; - Equação linear com uma incógnita; simplificação e caracterização do conjunto-solução; equações lineares impossíveis, possíveis, determinadas e indeterminadas; equação algébrica de 1.º grau; - Soluções exatas e aproximadas de equações algébricas de 1.º grau; - Problemas envolvendo equações lineares.	

8.º ANO

Tópico	**Objetivos**	**Tarefas**
Equações Equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores)	- Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes. - Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução.	
Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas	- Resolver sistemas de equações pelo método de substituição. - Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações. - Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações.	
Equações literais Operações com polinómios	- Resolver equações literais em ordem a uma das letras. - Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação. - Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios.	
Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita	- Resolver equações do 2.º grau a uma incógnita.	

Tarefas

Tarefa: No equilíbrio...

"Imaginemos pois um baloiço daqueles em que duas crianças se sentam em lados opostos de uma tábua que tem um eixo central. A finalidade, estou certo que já reconheceu o divertimento infantil, é que crianças com pesos semelhantes andem para cima e para baixo com pouca ajuda das pernas. Como é fácil calcular, mesmo sem se fazer a experiência, esta brincadeira não funcionará se de um lado colocarmos uma criança com $40\ kg$ e do outro uma com $20\ kg$. O baloiço ficará totalmente virado para o lado da criança mais pesada, ficando a outra suspensa lá em cima. Não é, pois, possível atingir o equilíbrio nestas condições. A menos que do lado da criança mais leve se coloque uma outra com o mesmo peso $(20 + 20 = 40\ kg)$ e, aí sim, o baloiço poderá funcionar. Percebe-se então que só será possível que as crianças fiquem à mesma altura se dos dois lados do baloiço estiverem crianças com o mesmo peso. O equilíbrio só será alcançado se tivermos o mesmo peso de ambos os lados.

Em Matemática podemos traduzir a palavra equilíbrio por igualdade. O equilíbrio do baloiço só será atingido se o peso dos dois lados for igual, os pratos da balança só estarão em equilíbrio se os pesos nos dois pratos forem iguais.

Em Matemática, a forma mais fácil de exprimir equilíbrio é a igualdade, ou, simbolicamente, o «sinal de igual». Um exemplo muito simples: $4 = 2 + 2$. Julgo que ninguém duvidará que 4 é efetivamente igual a $2 + 2$. O que está do lado direito do «sinal de igual» está em equilíbrio com o que está do lado esquerdo."

(Aibéo & Aibéo, 2012)

O que pensas das representações matemáticas sugeridas pelos autores para traduzir as situações apresentadas?

Apresenta outros exemplos que traduzam situações de equilíbrio.

Tarefa: O cão e a balança

Nas férias, a Augusta foi com o seu cão ao veterinário para uma consulta de rotina. Na triagem, começam por pesar o animal mas como o cão não gosta nada de ir ao veterinário, ninguém o consegue manter em cima da balança para o pesar. Assim, a Augusta resolve pegar no cão ao colo e pesarem-se os dois. Na balança pode ler-se "72,5 kg".

Sabendo que a Augusta pesa 51 kg:

1. Traduz esta situação em linguagem matemática.

2. Quanto pesa o cão? Explica como pensaste.

3. Se a Augusta pesar mais 5 kg, que valor seria apresentado no visor da balança? E se pesar menos 2 kg? E se a Augusta e o cão, individualmente, pesarem metade? O que podes concluir?

Tarefa: Magia ou Matemática?

Todos nós já fomos confrontados, alguma vez, com situações deste género:

Pensa num número.
Agora adiciona 6.
Multiplica por 2.
Subtrai 5.
Que número obtiveste?
Então o número em que pensaste foi o ...

1. Se a resposta fosse 21, em que número se tinha pensado? Explica como chegaste à tua resposta.

2. Se pensar no número 3 posso obter o número 10? Porquê?

3. O professor de Matemática da turma do Miguel apresentou esta situação aos seus alunos. Depois de experimentar 3 números, o Miguel afirmou que o resultado era sempre um número ímpar. Será que tem razão? Porquê?

4. Inventa o teu próprio problema e apresenta-o ao teu colega para ele adivinhar o número em que tu pensaste, explicando como pensou.

Tarefa: O problema da equação

Escreve um problema que possa ser traduzido pela equação $5 = 2x + 1$ e resolve-o. Explica o teu processo de resolução.

Tarefa: Certo é dinheiro

A televisão oferece diversos programas de entretenimento. O programa Certo é dinheiro consiste num jogo em que o participante tem que responder a um conjunto de 5 questões que valem dinheiro, consoante o grau de dificuldade. A segunda questão vale o dobro da primeira, a terceira o triplo da segunda, a quarta o quádruplo da terceira e a quinta cinco vezes mais que a quarta. Sabendo que o prémio máximo é de 12000€, quanto vale a primeira questão? Explica o teu raciocínio.

Tarefa: Família Melo

A soma das idades dos quatro filhos da família Melo é 43 anos. Um dos irmãos da Maria tem seis vezes mais anos do que ela, outro tem mais três enquanto a irmã tem o dobro da sua idade.

Qual é a idade de cada um dos filhos da família Melo? Explica como pensaste.

Tarefa: A pensar no mesmo número?

A professora Fausta pediu aos seus alunos para pensarem num número e para inventarem uma situação que permita aos colegas adivinharem o número em que pensaram. De seguida, convidou 3 alunos a apresentarem as suas situações.

Filipe	Alda	Mafalda
Se adicionar 2 ao número em que pensei obtenho 4. Em que número pensei?	O quadrado do número em que pensei é 4. Em que número pensei?	O cubo do número em que pensei é 8. Que número é esse?

O Pedro, aluno desta turma, disse de imediato:

Todos eles pensaram no mesmo número.

Será que o Pedro tem sempre razão?

Explica o teu raciocínio.

Tarefa: Dia de sorte

A Micaela encontrou 2€ na rua.

- Uau! – disse ela – Agora tenho cinco vezes mais dinheiro do que teria se tivesse perdido 2€.

Quanto dinheiro tinha a Micaela antes de ter encontrado os 2€?

Tarefa: Número incógnito

Que número deve ser adicionado a 129 e subtraído a 129, de modo a que a soma desse número com 129 seja duas vezes a diferença entre esse número e 129?

Tarefa: Mas que números!

I. Se a um número subtraíres 7 obténs a diferença entre o dobro desse número adicionado com 5 e o próprio número. Que número é esse?

II. Que número adicionado com ele próprio é igual a esse número adicionado com o seu consecutivo subtraído de uma unidade?

Tarefa: Mãe e filho

A mãe do António tem o quádruplo da idade do seu filho. Daqui a vinte anos, a mãe terá apenas o dobro da idade do seu filho. Quantos anos tem a mãe do António e o António agora?

Tarefa: A ideia do Zacarias

O professor de Matemática, para trabalho de casa, pediu aos alunos para pensarem no seguinte problema:

Escolhe dois números. Existe sempre um terceiro que multiplicado por um deles dá o outro.

Na aula seguinte todos os alunos disseram que tinham encontrado diversas soluções para o problema, exceto o Zacarias que disse que há casos em que o problema é falso.

Explica como é que o Zacarias poderá ter pensado.

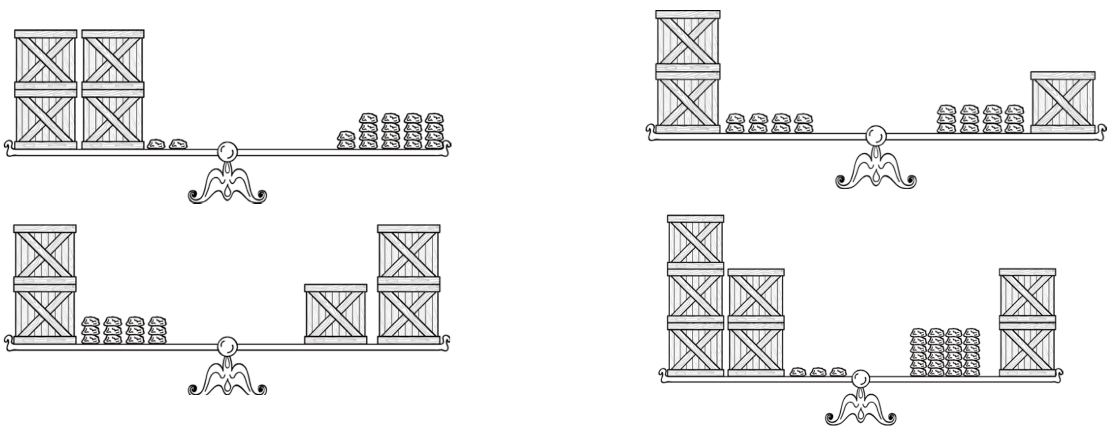
Tarefa: Balança de pratos

O sr. Matias é um geólogo muito famoso. Para o seu estudo foi colecionando pedras ao longo dos anos. As mais pequeninas arrumou-as em caixas. Ele sabe que cada pedra grande pesa $500\ g$, mas não sabe o peso das caixas. Para descobrir, ele recorreu a uma balança de pratos e aos seus conhecimentos de Matemática, já que não tinha pesos para colocar na balança.

1. A figura a seguir representa a primeira experiência que o sr. Matias fez.

Explica como o sr. Matias pode descobrir o que pretende.

2. O sr. Matias fez mais algumas experiências, como podes ver de seguida. Será que todas as caixas têm o mesmo peso? Explica como pensaste, depois de traduzires cada uma das situações em linguagem matemática.



(adaptado de http://illuminations.nctm.org/Lessons/GeologyRocks/GeologyRocks-AS.pdf)

Tarefa: A cantina da escola

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da escola do número de alunos que almoçaram na cantina. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

almoços servidos: 984

Na quarta e na sexta-feira serviram-se $\frac{3}{4}$ dos almoços servidos na terça e na segunda e na quinta-feira metade dos almoços da terça.

Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias? Explica como pensaste.

Tarefa: A vida de Diofanto

A história conservou pouco traços biográficos de Diofanto, importante matemático da antiguidade. Tudo o que se conhece sobre ele foi tirado da dedicatória que figura no seu sepulcro, inscrição composta em forma de exercício matemático.

> Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar, oh, milagre!, quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte constituiu a sua bonita infância. Tinha decorrido também uma duodécima parte da sua vida, quando lhe cresceu a barba. E a sétima parte da sua existência decorreu num casamento estéril. Passou mais um quinquénio e ficou feliz com o nascimento do seu maravilhoso primogénito, que entregou o seu corpo, a sua bonita existência à terra, e durou apenas metade da do seu pai. E com profunda pena desceu à sepultura, tendo sobrevivido quatro anos à morte do seu filho.
> Diga-me quantos anos tinha Diofanto quando morreu.

(Perelman, 2008)

Indica também os outros dados biográficos que ficas a saber da vida de Diofanto (com que idade casou, com que idade foi pai e com que idade perdeu o filho).

Tarefa: O cavalo e a mula

Parte I

Um cavalo e uma mula caminhavam juntos levando sobre os seus lombos sacos pesados. Lamentava-se o cavalo da sua desagradável carga, ao que a mula lhe disse: “De que te queixas? Se eu te levasse um saco, a minha carga seria o dobro da tua. Em contrapartida, se te dou um saco, a tua carga ficará igual à minha.”

(Perelman, 2008)

Quantos sacos levava cada um dos animais?

Parte II

A partir do problema anterior, o Gabriel resolveu formular outros problemas para levar para a aula de Matemática. Antes de os apresentar aos seus colegas esteve a resolver os problemas que inventou. Contudo, quando estava a resolver os problemas a sua mãe chamou-o e quando regressou à secretária reparou que a folha do trabalho tinha desaparecido.

O Gabriel não se lembra exatamente do problema nem das equações, mas sabe que obteve como resposta "0=-3". Que problema podia estar o Gabriel a resolver?

E se obtivesse "0=0"? Explica o teu raciocínio.

Interpreta graficamente as soluções dos sistemas associados aos problemas anteriores.

Tarefa: Evargla

O casal Milhafres quer ir passar uns dias ao Algarve. Esteve a consultar diversos hotéis e encontrou no hotel Evargla os seguintes programas:

Programa Evargla 1: 4 noites e 3 jantares (326 € por pessoa)

Programa Evargla 2: 5 noites e 4 jantares (413 € por pessoa)

Quanto custa cada noite e cada jantar por pessoa?

Tarefa: Pés e sapatos

Certamente que nunca mediste o comprimento do teu pé. Mas também não é preciso, porque a Matemática dá-te essa informação.

A expressão $S = \frac{5P+28}{4}$ dá uma indicação aproximada do número do sapato em função do tamanho do pé. Segundo esta expressão,

1. uma pessoa que tem um pé com 28 cm de medida de comprimento, quanto calçará?

2. uma pessoa que calce 37, quanto espera ser o comprimento do seu pé?

3. é possível obter o valor de S em função de P. Escreve uma expressão que dê o valor de P em função de S. Qual a vantagem de ter esta expressão?

Tarefa: Quadrado aumentado

Constrói um quadrado e calcula a sua área.

Aumenta a medida do lado do quadrado uma certa quantidade. O quadrado deu origem a um quadrado maior. Será que a área deste novo quadrado é igual á área do primeiro adicionada dessa nova quantidade? Investiga.

Tarefa: Quadrado diminuído

Constrói um quadrado dentro de outro quadrado e determina as suas áreas. Determina a área da região que resulta de tirar o quadrado pequenino ao quadrado grande. Encontra um processo que te permita obter a área dessa região para quaisquer quadrados.

Tarefa: Os desafios

Parte I

Para trabalho de casa o professor de Matemática pediu aos alunos para escreverem desafios que envolvessem as quatro operações aritméticas e o quadrado de um número. Na aula seguinte pediu a 3 alunos para apresentarem os seus desafios.

Desafio do Rui: Pensei em dois números. O seu produto é 36. Em que números pensei?

Desafio da Eva: Multipliquei dois números e o resultado deu zero. Em que números pensei?

Desafio da Miriam: A diferença entre o dobro do quadrado de um número e 50 é zero. Em que número pensei?

Em que números poderão ter pensado cada um dos alunos? Explica como pensaste.

Parte II

Na aula seguinte o professor pediu a mais 3 alunos para apresentarem os seus desafios.

Desafio do Manuel: O triplo do quadrado da idade da minha irmã é igual à idade da minha mãe. Se a minha mãe tem 48 anos, que idade tem a minha irmã?

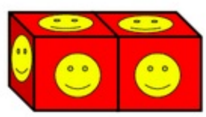
Desafio da Lígia: A diferença entre o quadrado de um número e o quádruplo desse número é zero. Que número é esse?

Desafio do Cristóvão: O quadrado do tempo que estudo diariamente é igual ao tempo que eu passo a ver televisão. Como é isso possível?

Resolve tu também os desafios.

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces. A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



Numa das construções colou 82 autocolantes. Quantos cubos terá usado na construção?

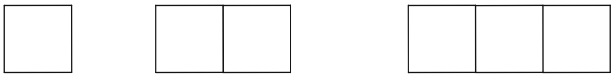
(Adaptado de Canavarro et al. (2014))

Anexo 10

Tarefas exploradas nas aulas dos professores caso do estudo

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos, que continua da mesma forma que a imagem sugere:



1 2 3

1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

(adaptada de (Rivera & Becker, 2008))

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.

1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

(Canavarro et al., 2014)

Tarefa: Inscrição no ginásio

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios **100 calorias** ou **Em forma** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:

100 Calorias
Inscrição: 50 €
Mensalidade: 40 €

Em Forma
Inscrição: Gratuita
Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

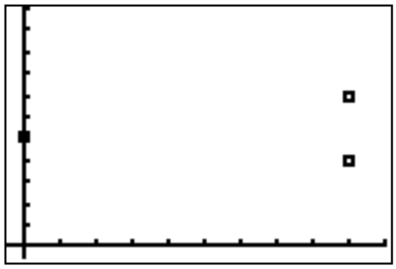
	meses	**1**	**3**		**8**		**11**	**12**
Total (em euros)	***100 calorias***			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio Em forma? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.

Tarefa: Funções e futebol



Temos na escola um candidato a grande guarda-redes!

Para que ele consiga esse objetivo é preciso que treine muito.

Vamos ajudá-lo!

Comecemos por preparar o terreno de jogo.

Como mostra a figura ao lado, na tua calculadora gráfica estão marcados os pontos $A(9{,}4)$ e $B(9{,}7)$ que serão os postes das balizas e o ponto $C(0, 5)$ o local onde o jogador fará o primeiro remate à baliza.

Primeiro vamos treinar os remates à baliza.

A trajetória destes remates está associada a uma reta definida por uma função, do tipo $y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{b}$, em que $\boldsymbol{m}$ representa a inclinação da reta (**declive**) e $\boldsymbol{b}$ o ponto onde esta interseta o eixo Oy (**ordenada na origem**).

Por exemplo, experimenta fazer o primeiro remate utilizando a função

$$y = 0{,}6x + 5 \qquad (m = 0{,}6 \text{ e } b = 5)$$

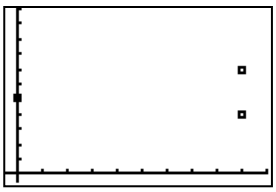
O que aconteceu? Acertaste na baliza?

<u>1º desafio</u>:

Encontra uma expressão para a função de modo que o remate acerte na baliza.

Já conseguiste?

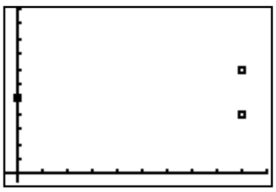
Desenha e regista a solução encontrada



$y =$ ________

Será que esta é a única solução?

Se encontraste outra, regista-a também a seguir:



$y =$ ________

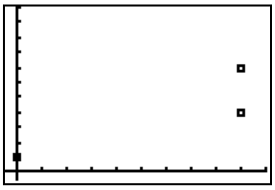
Ok, estás pronto para novos desafios?

Não te esqueças de registar sempre as soluções.

2º desafio:

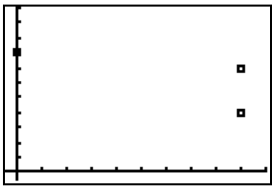
O rematador, muda de sítio cada vez que faz um remate. Para cada localização do ponto C, a seguir indicado, determina a solução para que a bola acerte na baliza:

a) $C(0,1)$



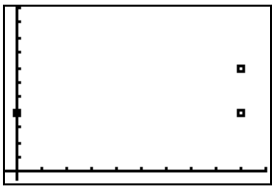
$y =$ ________

b) $C(0,8)$



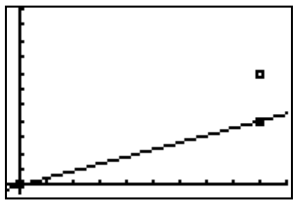
$y =$ ________

c) $C(0,4)$



$y =$ ________

3º desafio:

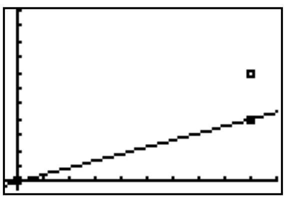


Num dos remates, o jogador colocado em $C(0,0)$, rematou segundo a expressão $y = \frac{4}{9}x$ e acertou num dos postes.

Confirma utilizando a calculadora.

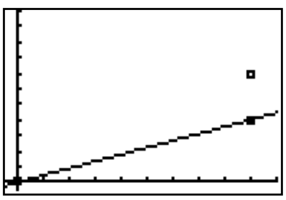
Descobre a expressão da função de modo que o remate tenha uma trajetória paralela à dada e indica em cada caso o local C em que o jogador rematou, de modo que a bola:

a) entre na baliza



$y =$ _____ $C(\quad,\quad)$

b) bata no outro poste



$y =$ _____ $C(\quad,\quad)$

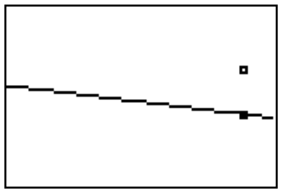
A pontaria está afinada?

O treino vai começar a aquecer!

4º desafio:

a) Desta vez, jogador fez um remate muito forte mas a pontaria não foi a melhor e acertou num poste, conforme mostra a figura. Sabe-se que a expressão da trajetória do remate foi

$$y = -\frac{2}{9}x + 6$$

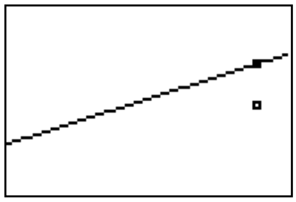


Sem utilizares a calculadora, indica a posição C de onde o rematador chutou.

Confirma o resultado com a calculadora.

b) A pontaria está afinada e no remate seguinte acertou, desta vez, no outro poste, com a trajetória dada pela expressão

$$y = \frac{2}{3}x + b$$



Determina, **sem utilizares a calculadora**, o local em que foi executado o remate.

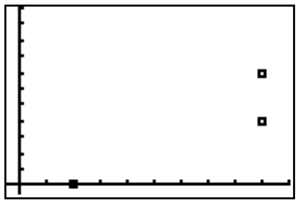
Confirma com a calculadora.

c) Um jogador vai agora rematar duas bolas do local $C(2,0)$ com as seguintes trajetórias definidas pelas funções:

$$y1 = 0{,}5x - 1$$

e

$$y2 = x - 2$$



Sem utilizares a calculadora, verifica se alguma delas acerta num dos postes?

Confirma os resultados com a calculadora.

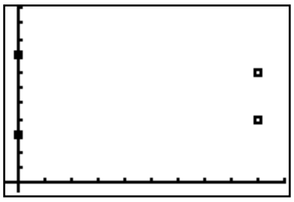
Finalmente o último teste às capacidades do guarda-redes: dois jogadores a chutarem ao mesmo tempo!

5º desafio:

Um remata do ponto $C(0,3)$ e outro do ponto $D(0,8)$. Ambos acertam na baliza.

Descobre uma expressão para cada uma das funções de modo que:

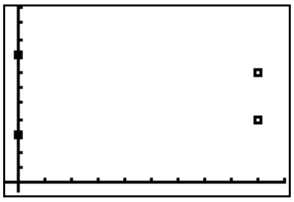
a) as trajetórias dos remates não se cruzem antes de cada bola entrar na baliza.



$y\ =$ ________

$y\ =$ ________

b) as trajetórias dos remates se cruzem antes de as bolas entrarem na baliza.



$y\ =$ ________

$y\ =$ ________

6º desafio:

Nos últimos remates do treino, os dois jogadores, colocados em sítios diferentes, remataram ao mesmo tempo e as bolas seguiram trajetórias definidas pelas funções:

$$y1\ =\ 2x \qquad \text{e} \qquad y2\ =\ -2x+8$$

Curiosamente, as bolas acabaram por bater uma na outra.

Verifica, **sem utilizares a calculadora**, em qual dos seguintes pontos as bolas chocaram:

a) $X(3,5)$ **b)** $Y(2,4)$ **c)** $Z(2,2)$

Tarefa: A cantina da escola

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da Escola Azul do número de alunos que almoçaram na cantina, durante essa semana. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

Na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda e na sexta serviu 156 almoços.

Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias, durante essa semana? Explica como pensaste.

Tarefa: A Família Rosa

A D. Miquelina Rosa tem 4 filhos, dois rapazes e duas raparigas. No dia em que festejou o seu 47.º aniversário, apercebeu-se que a soma das idades dos seus 4 filhos era igual à sua. A Maria tem 5 anos de diferença da irmã mais nova, a Sara. Um dos irmãos da Maria, o João, tem o triplo da sua idade e o outro, o Manuel, tem mais 10 anos do que a Maria. Qual é a idade de cada um dos filhos da família Rosa? Explica como pensaste.

Tarefa: Eleição do delegado de turma

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ A Sandra recebeu mais cinco votos que a Francisca;
- ✓ O Lucas recebeu metade dos votos que recebeu a Sandra.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

(Adaptado de Oliveira et al., (2012))

Tarefa: Sacos e bolas

Na figura estão representados dois sacos com bolas. O saco A tem 20 bolas e o saco B tem 15 bolas.

Determina o número de bolas que devem passar do saco A para o saco B para que este fique com $\frac{3}{2}$ do número de bolas que ficam no saco A.

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Tarefa: O retângulo num quadrado

Num armazém retangular, sabe-se que o dobro do comprimento é o triplo da largura. Se o armazém tivesse mais 3 metros de largura e menos 3 de comprimento, seria um quadrado.

Descobre as dimensões do armazém.

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Tarefa: O cavalo e o burro

Um cavalo e um burro caminhavam juntos, carregando, cada um, sacos bastante pesados. Lamentava-se o cavalo do seu pesado fardo, ao que o burro o interrompeu:

- De que te queixas?

- Se eu tomasse um dos teus sacos, a minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um saco, a tua carga ficaria igual à minha.

Quantos sacos levava o cavalo e o burro?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.